

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND II, HEFT 4

MIT 46 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 3. JULI 1948)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1948

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

*an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5*

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band II, Heft 4

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.

Seite

H. Beer , Untersuchung des seitlichen Ausweichens von Stabwerken mit elastisch gestütztem Mittelknoten (Mit 8 Textabbildungen)	265
H. Castelliz , Die Eigenschaften der Hochfrequenzübertragung zwischen Innen- und Außenleiter koaxialer Rohrsysteme (Mit 14 Textabbildungen).....	275
G. Kraus , Über lineare elektrische Übertragungssysteme (Mit 11 Textabbildungen)	286
H. Kastner , Betrachtungen zur Mohrschen Theorie der Bruchgefahr (Mit 6 Textabbildungen) ..	298
G. Oberdorfer , Die kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik und bizirkularen Quartik aus der komplexen Ortskurvendarstellung (Mit 7 Textabbildungen)	309

<i>Persönliches</i>	317
---------------------------	-----

Zur Erinnerung an Emil Müller.

<i>Buchbesprechungen</i>	319
--------------------------------	-----

Greinacher H., Ergänzungen zur Experimentalphysik (E. R. Berger). — Geisler K. W., Einführung in die Technische Chemie (A. Chwala). — Kohlrausch K. W. F., Ausgewählte Kapitel aus der Physik, I. Teil: Mechanik (F. Magyar). — Kraft V., Mathematik, Logik und Erfahrung (F. Magyar). — March A., Natur und Erkenntnis (L. Flamm). — Meißner E. (†) und H. Ziegler, Mechanik, Band I und Band II (K. Federhofer). — Pischinger A., Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen. Die Verbrennungskraftmaschine, Band 9. (C. Kämmerer). — Saliger R., Praktische Statik (F. Pongratz). — Stüssi F., Vorlesungen über Baustatik, Band I (K. Federhofer). — Wolf K., Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme, 2. Aufl. (F. Jung). — Pawelka E., 100 Übungen aus der Mechanik (F. Magyar).

Untersuchung des seitlichen Ausweichens von Stabwerken mit elastisch gestütztem Mittelknoten.

Von H. Beer, Graz.

Mit 8 Textabbildungen.

1. Übersicht.

Die Arbeit behandelt den Stabilitäts- und Festigkeitsfall des seitlichen Ausweichens von Rahmenknoten, die durch beliebig viele Stäbe gebildet sind. Die Stäbe

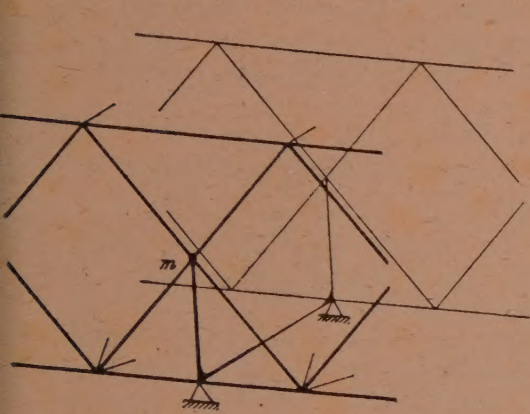


Abb. 1. Stabwerk mit elastisch gestütztem Mittelknoten. Beispiel aus dem Stahlbau.

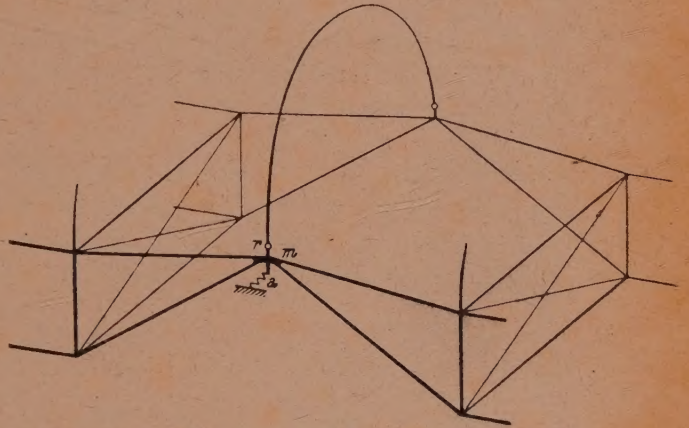


Abb. 2. Stabwerk mit elastisch gestütztem Mittelknoten. Beispiel aus dem Flugzeugbau.

werden biegungs- und torsionssteif vorausgesetzt und können an ihrem Ende beliebige Einspannbedingungen aufweisen. Der Rahmenknoten selbst kann gegen seitliches Ausweichen sowohl zentrisch als auch exzentrisch elastisch gestützt sein.

Es wird eine neue Form der Knickbedingung aus einer homogenen Gleichungsgruppe abgeleitet, welche die drei Bestimmungsstücke der Tangentialebene an den ausgebogenen Knoten als Unbekannte enthält. Bei Vorhandensein einer Querbelastung (Festigkeitsfall) wird die Gleichungsgruppe inhomogen und ergibt eindeutige Werte für die drei Unbekannten, aus denen die Kraft- und Verformungsgrößen der Stäbe einfach bestimmt werden können. Zahlenbeispiel aus dem Flugzeugbau und Diskussion der Ergebnisse.

2. Einleitung.

Stabwerke mit elastisch gestütztem Mittelknoten kommen als Baukonstruktionen und im Flugzeugbau häufig vor. Als Beispiel für den ersten Fall sei hier der mittlere Portalsknotenpunkt m einer stählernen Fachwerkbrücke angeführt (s. Abb. 1), der von den Fachwerkstäben, die teils Zug- und teils Druckkräfte erhalten, gebildet wird. Für den zweiten Fall möge als Beispiel das Traggerippe einer Rumpfkonstruktion

dienen (s. Abb. 2), bei der wegen eines einziehbaren Fahrgestelles, das eine Unterbrechung der durchgehenden Konstruktion erfordert, der Querspannt durch die dargestellte Rahmenkonstruktion abgefangen wird. Der Knoten m ist hierbei außerhalb seines Systempunktes gegen ein seitliches Ausweichen elastisch nachgiebig gestützt.

Wird ein solches Stabwerk außer durch Kräfte in seiner Systemebene auch noch durch eine Querbelastrung oder durch Exzentrizitätsmomente belastet, so treten neben den Verformungen in der Systemebene auch solche quer hierzu auf. Es soll nun jene Laststeigerung ermittelt werden, welche ein Versagen des Stabwerkes durch Erreichen der Bruchspannung in einem Querschnitt zur Folge hat. Ferner soll bei Fortfall der Querbelastrung (Stabilitätsfall) die Sicherheit gegen ein seitliches Ausknicken des Systems ermittelt werden.

Die zur Berechnung der unbekannten Kraft- und Verformungsgrößen dienenden Gleichungen werden aus Gleichgewichts- und Stetigkeitsbetrachtungen erhalten. Als Unbekannte werden zunächst die drei Bestimmungsstücke der Tangentialebene an den ausgebogenen Knoten gewählt, aus denen sich dann leicht die übrigen Größen ermitteln lassen. Zur Ermittlung der Unbekannten dienen die drei Gleichgewichtsbedingungen des Knotens. Für den Stabilitätsfall werden diese Gleichungen homogen und man erhält in bekannter Weise die Knickbedingung durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante der Unbekannten. Die ganze Untersuchung hat hierbei für die ν -fache Laststeigerung zu erfolgen, wenn ν die Sicherheit gegen Erreichen der Bruchspannung bzw. gegen seitliches Ausknicken ist.

3. Ableitung der Gleichungsgruppe für die Bestimmungsstücke der Tangentialebene.

Die Ableitung dieser Gleichungsgruppe geht von der räumlichen Stetigkeitsbedingung der an den Knoten anschließenden Stäbe im ausgebogenen Zustand aus. Sie beruht auf der Tatsache, daß die Tangenten an diese Stäbe, welche vor der Verformung mit den Stabachsen zusammenfallen und daher in der lotrechten Systemebene liegen, nach der Ausbiegung eine hierzu geneigte Tangen-

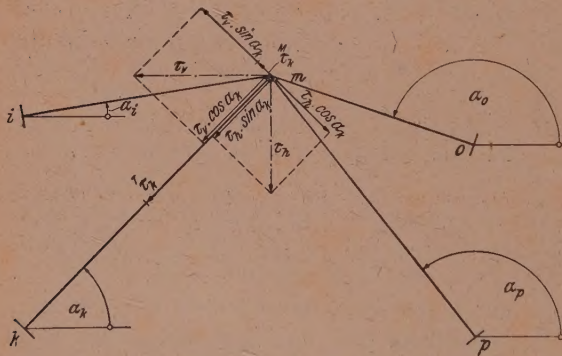


Abb. 3. Zerlegung der Winkelvektoren.

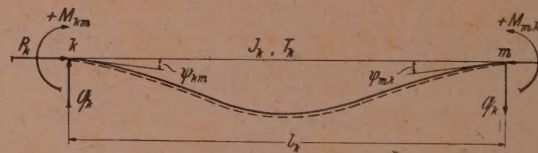


Abb. 4. Biegelinie des Einzelstabes.

tialebene bilden. Sie ist bestimmt, wenn zwei auf ihr liegende Gerade gegeben sind. Man wählt zweckmäßig die „Horizontaltangente“ und die „Vertikaltangente“ und führt die entsprechenden Neigungswinkel gegen die Systemebene τ_h und τ_v sowie das horizontale Ausbiegungsmaß η des Knotens als Unbekannte ein. Mit τ_h , τ_v und η ist der gesamte Verformungszustand bekannt und die Ermittlung der Kraftgrößen und schließlich der Spannungen kann für den Festigkeitsfall in der üblichen Weise erfolgen.

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ist es zunächst erforderlich, die Biegemomente, Torsionsmomente und Querkräfte der im Knoten m anschließenden Stäbe durch τ_h , τ_v und η auszudrücken. Da man die Winkelvektoren τ wie Kräfte

in Komponenten zerlegen kann, wird nach Abb. 3 für den Stab $k m$ der Verbiegungswinkel des Stabes m :

$${}^M\tau_{mk} = \tau_v \sin \alpha_k - \tau_h \cos \alpha_k \quad (1)$$

und der Verwindungswinkel am selben Stabende:

$${}^T\tau_{mk} = \tau_v \cos \alpha_k + \tau_h \sin \alpha_k. \quad (2)$$

Die Winkel α_k sind hierbei in dem in Abb. 3 eingetragenen Sinne zu zählen.

${}^M\tau_{mk}$ setzt sich zusammen aus dem Neigungswinkel der Stabsehne $\frac{\eta}{l_k}$ und dem Winkel der Tangente gegen die Sehne ψ_{mk} :

$${}^M\tau_{mk} = \frac{\eta}{l_k} + \psi_{mk}. \quad (3)$$

Die Ermittlung von ψ_{mk} erfolgt durch Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie für die vorhandene Längs- und Querbelastrung des Stabes $k m$. Besitzt der Stab eine Druckkraft und ist keine Querbelastrung vorhanden, so erhält man mit Hilfe von Abb. 4:

$$\begin{aligned} \psi_{km} &= \frac{M_{mk}}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\sin \omega_k l_k} - 1 \right) - \frac{M_{km}}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\operatorname{tg} \omega_k l_k} - 1 \right), \\ \psi_{mk} &= -\frac{M_{mk}}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\operatorname{tg} \omega_k l_k} - 1 \right) + \frac{M_{km}}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\sin \omega_k l_k} - 1 \right), \\ \omega_k^2 &= \frac{P_k}{T_k J_k}. \end{aligned}$$

T_k ist hierbei der Knickmodul des Stabes.

Für die Koeffizienten der Biegemomente werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$b_k' = \frac{1}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\sin \omega_k l_k} - 1 \right), \quad b_k'' = \frac{1}{P_k l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\operatorname{tg} \omega_k l_k} - 1 \right).$$

Die Neigungswinkel der Tangenten in den Stabenden gegen die Stabsehnenn sind dann mit nachstehenden Beziehungen durch die dort auftretenden Biegemomente ausgedrückt:

$$\psi_{km} = M_{mk} \cdot b_k' - M_{km} \cdot b_k'' \quad (4)$$

$$\psi_{mk} = M_{km} \cdot b_k' - M_{mk} \cdot b_k'' \quad (5)$$

Sind die Stabenden k nun gegen ein Herausdrehen aus der Systemebene elastisch eingespannt und bezeichnet c_k den Drehwinkel an der Einspannstelle für ein dort wirkendes Biegemoment von der Größe „1“, so gilt die Stetigkeitsbedingung:

$$\frac{\eta}{l_k} - \psi_{km} = M_{km} \cdot c_k$$

oder, wenn für ψ_{km} Gl. (4) eingesetzt wird:

$$M_{km} = M_{mk} \frac{b_k'}{b_k'' - c_k} - \frac{\eta}{l_k} \frac{1}{b_k'' - c_k}.$$

Nach Einführung dieses Ausdruckes in Gl. (5) erhält man:

$$\psi_{mk} = -M_{mk} \left[b_k'' - \frac{(b_k')^2}{b_k'' - c_k} \right] - \frac{\eta}{l_k} \cdot \frac{b_k'}{b_k'' - c_k}.$$

Schließlich erhält man mit Hilfe von Gl. (1) und (3):

$$\tau_k = \tau_v \sin \alpha_k - \tau_h \cos \alpha_k = -M_{mk} \left[b_k'' - \frac{(b_k')^2}{b_k'' - c_k} \right] + \eta \cdot \frac{1}{l_k} \left[1 - \frac{b_k'}{b_k'' - c_k} \right]. \quad (6)$$

Daraus kann M_{mk} und damit auch die Querkraft durch die Formänderungsgrößen τ_v ,

τ_h und η ausgedrückt werden. Für die weitere Rechnung führt man zweckmäßig folgende Abkürzungen ein:

$$N_k = b_k'' (b_k'' - c_k) - (b_k')^2; \quad \kappa_k = \frac{b_k'' - c_k}{N_k};$$

$$\mu_k = \frac{b_k'' - b_k' - c_k}{l_k \cdot N_k}; \quad \Omega_k = \frac{2(b_k'' - b_k') - c_k}{l_k N_k} + P_k.$$

Dann werden die Biegemomente an den Stabenden:

$$M_{mk} = \tau_h \kappa_k \cos \alpha_k - \tau_v \kappa_k \sin \alpha_k + \eta \cdot \mu_k. \quad (7)$$

$$M_{km} = \tau_h \frac{b_k'}{N_k} \cos \alpha_k - \tau_v \frac{b_k'}{N_k} \sin \alpha_k - \eta \frac{b_k'' - b_k'}{N_k \cdot l_k}. \quad (8)$$

Die Querkraft im Stab $k m$ wird unter der Annahme, daß die Stabkraft in der Richtung der Stabsehne wirkt:

$$Q_k = \Omega_k + P_k \frac{\eta}{l_k} = \frac{M_{mk} - M_{km}}{l_k} + P_k \frac{\eta}{l_k},$$

oder unter Beachtung von (7) und (8):

$$Q_k = \tau_h \mu_k \cos \alpha_k - \tau_v \mu_k \sin \alpha_k + \eta \cdot \Omega_k. \quad (9)$$

Sonderfälle:

1. Starre Einspannung ($c_k = 0$):

$$N_k = (b_k'')^2 - (b_k')^2; \quad \kappa_k = \frac{b_k'}{N_k}; \quad \mu_k = \frac{1}{l_k (b_k' + b_k'')};$$

$$\Omega_k = 2 \mu_k + P_k.$$

2. Gelenkiges Stabende ($c_k = \infty$):

$$\kappa_k = \frac{1}{b_k''}; \quad \mu_k = \frac{1}{l_k b_k''}; \quad \Omega_k = \frac{1}{l_k b_k''} + P_k.$$

3. Zugstab (P_k negativ):

$$b_k' = -\frac{1}{|P_k| l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\sin \omega_k l_k} - 1 \right); \quad b_k'' = -\frac{1}{|P_k| l_k} \left(\frac{\omega_k l_k}{\operatorname{tg} \omega_k l_k} - 1 \right).$$

4. Stab ohne Normalkraft ($P_k = 0$):

$$b_k' = \frac{l_k}{6 T_k J_k}; \quad b_k'' = -\frac{l_k}{3 T_k J_k}.$$

5. Eigenwert des Stabes ($\omega_k l_k = \pi$):

$$\kappa_k = -\frac{1}{\frac{4}{\pi^2} l_k' + c_k}; \quad l_k' = \frac{l_k}{T_k J_k};$$

$$\mu_k = -\frac{2}{\frac{4}{\pi^2} l_k' + c_k}; \quad \Omega_k = -\frac{4}{\frac{4}{\pi^2} l_k' + c_k}.$$

Berücksichtigt man den Einfluß der Torsionssteifigkeit der Stäbe, so hat man noch das Torsionsmoment des Stabes $k m$ durch den Verwindungswinkel auszudrücken. Es ist:

$$T_{mk} = \delta_k \cdot \tau_{mk},$$

wenn δ_k das Torsionsmoment am Stabende m für die dort auftretende Verwindung „1“ bedeutet. Die Ermittlung von δ_k kann auf bekannte Weise erfolgen. Für offene, aus schmalen Rechtecken zusammengesetzte Querschnitte ist zum Beispiel, wenn man elastisch nachgiebige Torsionseinspannung ohne Wölbbehinderung annimmt:

$$\delta_k = \frac{1}{\frac{l_k}{G \cdot J_k^d} + \bar{c}_k}.$$

\bar{c}_k bedeutet hierbei den Verwindungswinkel an der Einspannstelle für ein dortselbst wirkendes Torsionsmoment von der Größe „1“ und J_k^d das Torsionsträgheitsmoment des Querschnittes. Ist eine Behinderung der Querschnittswölbung vorhanden (Wölbkrafttorsion), so hat man den Nenner von δ_k entsprechend abzumindern. Es ist dann:

$$\delta_k = \frac{1}{\frac{l_k}{G \cdot J_k^d} + \bar{c}_k - F_k(\alpha, \beta)}.$$

Hierbei ist $F(\alpha, \beta)$ aus der von Timoshenko aufgestellten Differentialgleichung für den Verwindungswinkel φ für die entsprechenden Randbedingungen zu ermitteln.¹ Die gesuchte Beziehung zwischen dem Torsionsmoment und den Bestimmungsstücken der Tangentialebene lautet dann:

$$T_{mk} = \tau_v \delta_k \cos \alpha_k + \tau_h \delta_k \sin \alpha_k. \quad (10)$$

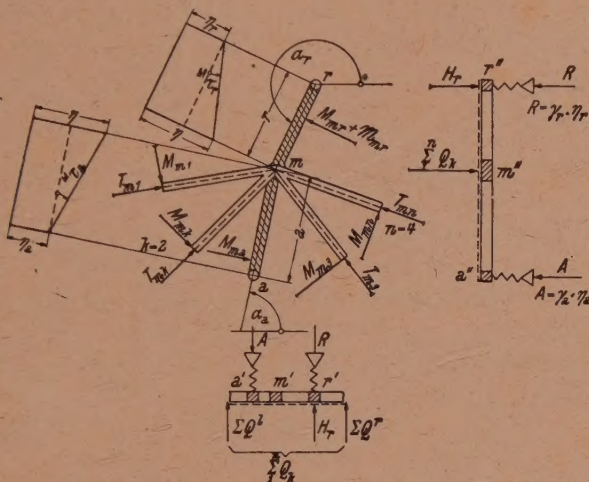


Abb. 5. Gleichgewicht des Knotens m.

Die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten m lauten unter Verwendung von Abb. 5, wobei die Summen über alle Stäbe k zu erstrecken sind:

$$\sum_{k=1}^n M_{mk} \cos \alpha_k - \sum_{k=1}^n T_{mk} \sin \alpha_k + M_{ma} \cos \alpha_a = - (M_{mr} + \mathfrak{M}_{mr}) \cos \alpha_r. \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{mk} \sin \alpha_k + \sum_{k=1}^n T_{mk} \cos \alpha_k + M_{ma} \sin \alpha_a = - [M_{mr} + \mathfrak{M}_{mr}] \sin \alpha_r. \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_k - A - R = - H_r. \quad (13)$$

Hierin ist:

$$A = \gamma_a \cdot \eta_a = \gamma_a (\eta - M_{ta} \cdot a) = \tau_h \cdot \gamma_a a \cdot \cos \alpha_a - \tau_v \gamma_a a \sin \alpha_a + \eta \cdot \gamma_a;$$

$$M_{ma} = - A \cdot a; \quad R = \tau_h \gamma_r r \cos \alpha_r - \tau_v \gamma_r r \sin \alpha_r + \eta \cdot \gamma_r;$$

$$M_{mr} = - r (R - H_r);$$

\mathfrak{M}_{mr} = äußeres, angreifendes Biegemoment am Hebelarm m r. H_r = äußere, angreifende Horizontalkraft in r.

¹ S. u. a. F. Bleich: Theorie und Berechnung eiserner Brücken, S. 295.

Drückt man ferner noch die Kraftgrößen M , T und Q mit Hilfe der Gl. (7) bis (10) aus, so erhält man die Gleichgewichtsbedingungen in folgender Form:

$$\begin{aligned} \tau_h \left\{ \sum_1^n [\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k] - \gamma_a a^2 \cos^2 \alpha_a - \gamma_r r^2 \cos^2 \alpha_r \right\} - \tau_v \left\{ \sum_1^n [\kappa_k + \right. \\ \left. + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - \gamma_a a^2 \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_a - \gamma_r r^2 \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_r \right\} + \eta \left[\sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \right. \\ \left. - \gamma_a a \cos \alpha_a - \gamma_r r \cos \alpha_r \right] = -H_r r \cos \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \cos \alpha_r. \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} \tau_h \left\{ \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - \gamma_a a^2 \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_a - \gamma_r r^2 \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_r \right\} - \tau_v \left\{ \sum_1^n [\kappa_k \sin^2 \alpha_k - \right. \\ \left. - \delta_k \cos^2 \alpha_k] - \gamma_a a^2 \sin^2 \alpha_a - \gamma_r r^2 \sin^2 \alpha_r \right\} + \eta \left[\sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - \gamma_a a \sin \alpha_a - \right. \\ \left. - \gamma_r r \sin \alpha_r \right] = -H_r r \sin \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \sin \alpha_r. \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \tau_h \left[\sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \gamma_a a \cos \alpha_a - \gamma_r r \cos \alpha_r \right] - \tau_v \left[\sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - \gamma_a a \sin \alpha_a - \right. \\ \left. - \gamma_r r \sin \alpha_r \right] + \eta \left[\sum_1^n \Omega_k - \gamma_a - \gamma_r \right] = -H_r. \end{aligned} \quad (13a)$$

Aus diesen drei Gleichungen können die Unbekannten τ_h , τ_v und η eindeutig bestimmt werden. Die Biegungs- und Torsionsmomente sowie die Querkräfte in den Stäben sind dann durch die Formeln (7) bis (10) gegeben. Für zentrische, elastisch nachgiebige Knotenstützung ist $a = r = 0$ und $\gamma_a = \gamma_r = \gamma$. Die Gl. (11a) bis (13a) nehmen dann folgende einfache Form an:

$$\begin{aligned} \tau_h \sum_1^n [\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k] - \tau_v \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k + \eta \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k = \\ = -H_r r \cos \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \cos \alpha_r. \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \tau_h \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - \tau_v \sum_1^n [\kappa_k \sin^2 \alpha_k - \delta_k \cos^2 \alpha_k] + \eta \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k = \\ = -H_r r \sin \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \sin \alpha_r. \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\tau_h \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \tau_v \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k + \eta \left[\sum_1^n \Omega_k - \gamma \right] = -H_r. \quad (13b)$$

Fällt die Knotenstützung ganz fort, dann ist auch $\gamma = 0$. Eine besondere Beachtung erfordert der Fall der starren Knotenstützung ($\gamma \rightarrow \infty$). Für zentrische Haltung ist dann $\eta = 0$ und die Gl. (13b) dient nicht mehr zur Ermittlung der nunmehr auf die beiden Neigungen τ_h und τ_v reduzierten unbekannten Bestimmungsstücke der Tangentialebene, sondern lediglich zur Berechnung des Auflagerdruckes. Die Gleichungen für τ_h und τ_v lauten dann:

$$\begin{aligned} \tau_h \sum_1^n [\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k] - \tau_v \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k = \\ = -H_r r \cos \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \cos \alpha_r. \end{aligned} \quad (11c)$$

$$\begin{aligned} \tau_h \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - \tau_v \sum_1^n [\kappa_k \sin^2 \alpha_k - \delta_k \cos^2 \alpha_k] = \\ = -H_r r \sin \alpha_r - \mathfrak{M}_{mr} \sin \alpha_r. \end{aligned} \quad (12c)$$

Ist nur eine exzentrische starre Knotenstützung bei a vorhanden, so ist $\eta_a = 0$ und $\eta = -\tau_h a \cos \alpha_a + \tau_v a \sin \alpha_a$ (s. Abb. 5). Ferner folgt aus Gl. (13):

$$A = \sum_1^n Q_k + H = \tau_h \sum_1^n [\mu_k \cos \alpha_k - \Omega_k a \cos \alpha_a] - \tau_v \sum_1^n [\mu_k \sin \alpha_k - \Omega_k a \sin \alpha_a] + H_r.$$

Setzt man die Ausdrücke für $M_a = -A \cdot a$ und η in die Gl. (11a) und (12a) ein, so wird für $\gamma_r = 0$:

$$\begin{aligned} & \tau_h \sum_1^n [\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k - a \cos \alpha_a (2 \mu_k \cos \alpha_k - \Omega_k a \cos \alpha_a)] - \\ & - \tau_v \sum_1^n \left\{ (\kappa_k + \delta_k) \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - a \left[\mu_k \sin (\alpha_k + \alpha_a) - \Omega_k a \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_a \right] \right\} = \\ & = -H_r [r \cos \alpha_r - a \cos \alpha_a] - \mathfrak{M}_{mr} \cos \alpha_r. \end{aligned} \quad (11d)$$

$$\begin{aligned} & \tau_h \sum_1^n \left\{ (\kappa_k + \delta_k) \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_k - a \left[\mu_k \sin (\alpha_k + \alpha_a) - \Omega_k a \frac{1}{2} \sin 2 \alpha_a \right] \right\} - \\ & - \tau_v \sum_1^n \left\{ \kappa_k \sin^2 \alpha_k - \delta_k \cos^2 \alpha_k - a \sin \alpha_a [2 \mu_k \sin \alpha_k - \Omega_k a \sin \alpha_a] \right\} = \\ & = -H_r [r \sin \alpha_r - a \sin \alpha_a] - \mathfrak{M}_{mr} \sin \alpha_r. \end{aligned} \quad (12d)$$

Ist eine starre Knotenstützung in a und in r vorhanden (s. Abb. 5), so wird $\eta_a = \eta_r = 0$. Es gelten daher folgende geometrische Beziehungen:

$$\eta = -\tau_h a \cos \alpha_a + \tau_v a \sin \alpha_a = -\tau_h r \cos \alpha_r + \tau_v r \sin \alpha_r$$

oder daraus:

$$\tau_v = \tau_h \frac{r \cos \alpha_r - a \cos \alpha_a}{r \sin \alpha_r - a \sin \alpha_a}.$$

Es verbleibt demnach nur eine einzige unbekannte Formänderungsgröße, nämlich τ_h , welche z. B. aus der Gl. (11) bzw. (11a) zu ermitteln ist. Hierbei sind die Gl. (12) und (13) zur Berechnung der Kraftgrößen $M_{ma} = -A \cdot a$ und $M_{mr} = -R \cdot r + H_r \cdot r$ zu verwenden, die aus (11) eliminiert werden müssen. Auf die einfache Rechnung sei hier verzichtet.

Da die vorstehende Berechnung unter Berücksichtigung der Systemverformung erfolgt, verliert das lineare Superpositionsgesetz seine Gültigkeit. Man wird daher zur Bestimmung der Sicherheit ν_B gegen Bruch mit den ν_B -fachen Gebrauchslasten zu rechnen haben. Praktisch wird man für die am ungünstigsten beanspruchten Stabquerschnitte die Randspannung σ für verschiedene angenommene Sicherheiten ν berechnen und die Kurve $\sigma = f(\nu)$ mit der Geraden $|\sigma_B = \text{const.}|$ zum Schnitt bringen. Die Abszisse des Schnittpunktes ist dann die Bruchsicherheit ν_B . Bei Überschreiten der Elastizitätsgrenze ist besonders zu beachten, daß mit einem abgeminderten Elastizitätsmodul gerechnet werden muß. Überwiegen die Normalspannungen, so wird man näherungsweise die Abminderung aus der Knickspannungskurve $\sigma_k = f(\lambda)$ errechnen. Der Einfluß der Torsionssteifigkeit der Stäbe ist bei offenen Querschnitten meist gering und man wird näherungsweise $\delta_k = 0$ setzen können.

4. Stabilitätsberechnung.

Für den Stabilitätsfall verschwinden die Belastungsglieder auf den rechten Gleichungsseiten der Gl. (11a) bis (13a); die Gleichungen werden homogen und die Koeffizientendeterminante muß zu Null werden. Diese Knickbedingung wäre nun nach der Knicksicherheit ν aufzulösen, was entweder versuchsweise oder graphisch geschehen könnte. Einfacher und für die Bemessung der elastischen Rückhaltung der Knotenstützung wertvoller jedoch ist es, die Federkonstante (γ) als Funktion der Knicksicherheit ν darzustellen und die Kurve $\gamma = f(\nu)$ mit der tatsächlich vorhandenen Federkonstanten (γ_ν), die entweder von der Knicksicherheit unabhängig ist oder linear davon abhängt, also eine Gerade ist, zum Schnitt zu bringen. Die

Tab. 1. Systemmaße, Querschnittswerte und Belastungen.

k	l_k	$\sin \alpha_k$	$\cos \alpha_k$	F_k	$J_k \cdot 10^6$	W_k	$J_k^d \cdot 10^6$	$^2 \bar{J}_k^d$	W_k^d	$c_k \cdot 10^{-2}$	$\bar{c}_k \cdot 10^{-2}$	P_k	$\frac{1.5}{P_k}$
Dim	m	1	1	cm ²	m ⁴	cm ³	m ⁴	cm ⁴	cm ³	t ⁻¹ m ⁻¹	t ⁻¹ m ⁻¹	t	t
1	1.022	0.5912	0.8065	43.7	1.62	41.6	0.960	44.61	12.86	2.877	0.500	34.8	52.2
2	0.851	0.2503	0.9682	20.8	0.80	37.0	0.077	3.59	2.56	0.090	2.100	2.7	4.0
3	1.081	0.4598	-0.8881	18.7	0.70	17.1	0.076	3.59	2.56	18.680	2.500	11.3	17.0
4	0.968	0.1271	-0.9919	32.1	1.26	50.0	0.320	15.08	6.41	0.012	1.100	24.7	37.0

$$r = 0.065 \text{ m}; \quad \alpha_r = 270^\circ; \quad \gamma_r = 203.6 \frac{\text{t}}{\text{m}}; \quad H_r = \nu \cdot 8.934.$$

Zunächst wird die Festigkeitsuntersuchung für verschiedene angenommene Werte von ν , und zwar $\nu = 1.5, 2.7, 3.3$, durchgeführt. Zur Ermittlung von τ_h , τ_v und η dienen die Gl. (11a) bis (13a), wenn man darin $\gamma_a = \mathfrak{M}_{mr} = 0$ setzt. Mit Hilfe der Formeln (7) bis (10) kann man dann leicht die Biegungs- und Torsionsmomente sowie die Querkräfte in den einzelnen Stäben für die vorstehend angenommenen Werte von ν berechnen. Für gegebene Querschnittswerte sind dann auch die maximalen Randspannungen bekannt, die sich aus der Überlagerung der Spannungen aus den Biegemomenten und Normalkräften mit den Torsionsschubspannungen nach der Gestaltsänderungstheorie ergeben. Als Ergebnis der durchgeführten Zahlenrechnung sind die Maximalspannungen σ im maßgebenden Stab $2m$ als Funktion der Sicherheiten ν in Abb. 7 dargestellt. Die Kurve $\sigma = f(\nu)$ besitzt einen allmählich ansteigenden Verlauf. Ihr Schnittpunkt mit der Geraden $\sigma = \sigma_B = 5 \text{ t/cm}^2$ liegt bei $\nu = 2.01$. Das System besitzt demnach etwa eine zweifache Sicherheit gegen Bruch.

Für die Stabilitätsberechnung ist γ_r aus nachstehender Determinante als Funktion von ν zu ermitteln.

$$0 = \begin{vmatrix} \sum_1^n [\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k] - \gamma_r r^2 \cos^2 \alpha_r & - \left| \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{\sin 2 \alpha_k}{2} - \gamma_r r^2 \frac{\sin 2 \alpha_r}{2} \right| & \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \gamma_r r \cos \alpha_r \\ \sum_1^n [\kappa_k + \delta_k] \frac{\sin 2 \alpha_k}{2} - \gamma_r r^2 \frac{\sin 2 \alpha_r}{2} & \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \gamma_r r \cos \alpha_r & \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - \gamma_r r \sin \alpha_r \\ - \left| \sum_1^n [\kappa_k \sin^2 \alpha_k - \delta_k \cos^2 \alpha_k] - \gamma_r r^2 \sin^2 \alpha_r \right| & \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - \gamma_r r \sin \alpha_r & \sum_1^n \Omega_k - \gamma_r \\ \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k - \gamma_r r \cos \alpha_r & \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - \gamma_r r \sin \alpha_r & \sum_1^n \Omega_k - \gamma_r \end{vmatrix}$$

$^2 \bar{J}_k^d$ = Torsionsträgheitsmoment für den maßgebenden Rechteckquerschnitt.

Diese Knickbedingung, die allgemein für das Stabwerk mit exzentrisch, elastisch gestütztem Mittelknoten gilt, ist linear in der Federkonstanten γ_r , so daß sich für

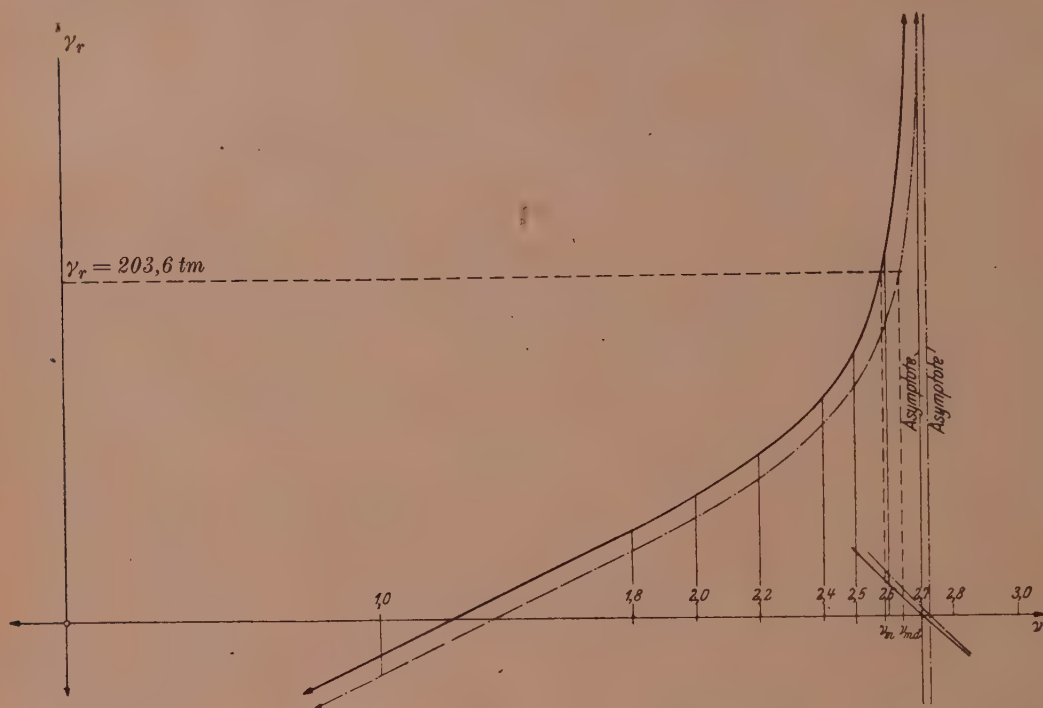


Abb. 8. Bestimmung der maßgebenden Sicherheit nach den Ergebnissen der Stabilitätsuntersuchung. $\nu_m = 2,59$ ohne Berücksichtigung der Torsion. $\nu_{md} = 2,64$ mit Berücksichtigung der Torsion.

jede angenommene Knicksicherheit ν nur eine Kurvenordinate $\gamma_r = f(\nu)$ ergibt. Die Gleichung zur Bestimmung von γ_r lautet:

$$\gamma_r = \frac{Z_r}{N_r}.$$

Hierin bedeutet:

$$\begin{aligned} Z_r &= b \left(2 \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k - b \sum_1^n \Omega_k \right) + a \left[c \sum_1^n \Omega_k - \left(\sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k \right)^2 \right] - \\ &\quad - c \left(\sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k \right)^2. \\ N_r &= a \left[r^2 \sin^2 \alpha_r \sum_1^n \Omega_k - 2 r \sin \alpha_r \sum_1^n \mu_k \sin \alpha_k + c \right] + b \left[2 r \sum_1^n \mu_k \sin (\alpha_k + \alpha_r) - \right. \\ &\quad \left. - r^2 \sin 2 \alpha_r \sum_1^n \Omega_k - b \right] + c r \cos \alpha_r \left[r \cos \alpha_r \sum_1^n \Omega_k - 2 \sum_1^n \mu_k \cos \alpha_k \right] - \\ &\quad - r^2 \left[\sum_1^n \mu_k \sin (\alpha_k - \alpha_r) \right]^2. \\ a &= \sum_1^n (\kappa_k \cos^2 \alpha_k - \delta_k \sin^2 \alpha_k). \\ b &= \sum_1^n (\kappa_k + \delta_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k. \\ c &= \sum_1^n (\kappa_k \sin^2 \alpha_k - \delta_k \cos^2 \alpha_k). \end{aligned}$$

Für $N_r = 0$ erhält man die Asymptote und für $Z_r = 0$ den Nullpunkt der Kurve $\gamma = f(\nu)$, welche in Abb. 8 dargestellt ist. Die Berechnung wurde zuerst für $\delta_k = 0$, das ist unter Vernachlässigung des Einflusses der Torsionssteifigkeit der Stäbe, durchgeführt und deren Ergebnisse ebenfalls in Abb. 8 eingetragen [$\bar{\gamma}_r = \bar{f}(\nu)$]. Man erkennt, daß trotz der Wahl ziemlich gedrungener Querschnitte für die einzelnen Stäbe die Knicksicherheit nur wenig abnimmt.

6. Schlußbetrachtung.

Das vom Verfasser entwickelte Verfahren ermöglicht die Festigkeits- und Stabilitätsuntersuchung eines Stabwerkes mit an beliebigen Punkten elastisch gestütztem Mittelknoten. Als besonderer Vorteil der Methode kann angeführt werden, daß die Zahl der aufzulösenden Gleichungen — unabhängig von der Zahl der Stäbe — nur 3 beträgt. Auch die Knickbedingung besteht demnach nur aus einer dreizeiligen Determinante, aus der mit Hilfe einer linearen Gleichung die für eine gegebene Knicksicherheit erforderliche Knotenrückhaltung errechnet werden kann. Die Berücksichtigung der Torsionssteifigkeit der Stäbe macht keinerlei Schwierigkeiten und vermehrt die Zahl der Gleichungen nicht. Sind die Stäbe auch an ihrem anderen Ende gegen ein Ausweichen aus ihrer Systemebene elastisch nachgiebig gehalten, so tritt mit jedem nachgiebigen Endpunkt eine neue Gleichung hinzu. Es empfiehlt sich dann, die Stabdrehwinkel der betrachteten Stäbe als neue Unbekannte einzuführen. Für Stabwerke mit zwei freien Knoten vermehrt sich die Zahl der Gleichungen von drei auf sechs. Da hierbei keine neuen Gedankengänge auftreten, kann auf die — im übrigen ganz ähnliche — mathematische Behandlung dieses Falles verzichtet werden.

Das Verfahren wurde für ebene Stabwerke entwickelt. Seine Anwendung auf räumliche Stabwerke ist jedoch ebenfalls möglich, wenn man an Stelle der Tangentialebene nunmehr eine Tangentialpyramide annimmt, deren Bestimmungsstücke in der ausgebogenen Lage als Unbekannte aufgefaßt werden. Hierauf soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

(Eingegangen am 3. Dezember 1946.)

Die Eigenschaften der Hochfrequenzübertragung zwischen Innen- und Außenleiter coaxialer Rohrsysteme.

Von H. Castelliz, Wien.

Mit 14 Textabbildungen.

1. Einleitung. (Die „Rohrdurchflutung“.)

Es gibt auf dem Gebiete der Hochfrequenz eine Erscheinung, die merkwürdigerweise, obwohl der Tatsache nach nicht unbekannt, in ihren Konsequenzen und Anwendungsmöglichkeiten im allgemeinen so gut wie nicht beachtet wird. Z. B. findet man darüber meines Wissens in der ausgebreiteten Lehrbuchliteratur keinerlei Bemerkung. In der Tat führt sie zu Ergebnissen, die zum Teil selbst für den Hochfrequenztechniker oft verblüffend wirken.

Die Hochfrequenzströme, die den Querschnitt einer geschirmten Leitung oder allgemeiner ein „Loch“ in einem Leiter durchsetzen, sind miteinander verknüpft, und zwar in der Weise, daß ihre Summe in jedem Augenblick Null ist. Diese Tatsache ist eine Folge des Skineffektes und läßt sich folgendermaßen aus den Maxwell'schen Gleichungen ableiten:¹ Der Querschnitt einer Öffnung in einem metallischen

¹ H. O. Roosenstein: Telefunken-Z. 20, Nr. 81, 13 (1939).

Leiter (A, Abb. 1) werde von einer Anzahl weiterer Leiter (B) durchsetzt; die Wandstärke des Leiters A sei überall groß gegenüber der „Eindringtiefe“ der betrachteten Hochfrequenzströme. Dann läßt sich um die Öffnung ein im Inneren der Wandung A verlaufender geschlossener Weg (s) so legen, daß längs desselben überall die Feldstärken verschwinden. Wendet man nun das Durchflutungsgesetz in der integrierten Form

$$\oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + i \right) d\mathfrak{f} \quad (1)$$

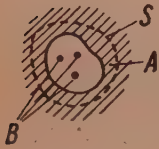


Abb. 1.

auf den von s berandeten Querschnitt an, so zeigt sich, da längs des Integrationsweges der linken Seite $\mathfrak{H} = 0$ ist, daß

$$\int \left(\frac{d\mathfrak{D}}{dt} + i \right) d\mathfrak{f} = 0 \quad (2)$$

sein muß. Die gesamte Durchflutung der Öffnung ist also Null.

Ist eine Komponente des Verschiebungsstromes in Richtung der Achse der Öffnung nicht vorhanden, wie es im allgemeinen der Fall ist, wenn die Abmessungen der Öffnung klein gegen die Wellenlänge sind, und insbesondere in Rohrleitungen, wo der Vektor der elektrischen Feldstärke senkrecht zu der Leiteroberfläche steht, so gilt der Satz für die Leitungsströme allein:

$$\int i d\mathfrak{f} = 0. \quad (3)$$

Diese Beziehung, die man geradezu als „Rohrdurchflutungssatz“ bezeichnen könnte, liegt den folgenden Betrachtungen zugrunde. Sie gilt natürlich theoretisch nicht

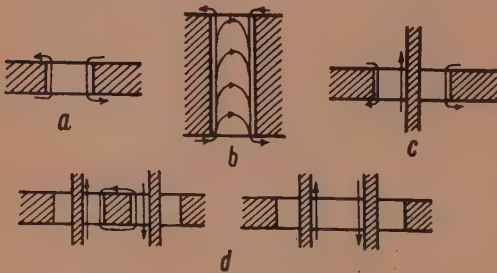


Abb. 2.



Abb. 3.

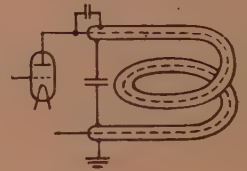


Abb. 4.

streng, da die Felder in Leitern nach dem Innern zu exponentiell abfallen, also nirgends wirklich verschwinden. Praktisch spielt das jedoch bei nicht allzu kleiner Wandstärke so wenig eine Rolle, daß man das Ergebnis als absolut betrachten kann.

Eine sehr naheliegende Anwendung unseres Satzes ergibt sich bei Betrachtung der Entstehung sog. Gehäuseströme auf Abschirmkästen u. dgl. Durch eine einfache Öffnung in einer Wandung können Ströme von einer Seite auf die andere nur in der Weise treten, daß derselbe Strom, der an einer Stelle aus-, an einer anderen wieder eintritt (Abb. 2a), was nur dann geschieht, wenn längs der Berandung der Öffnung Potentialdifferenzen bestehen. Ist die Wandstärke des Gehäuses groß gegen den Querschnitt der Öffnung (enge Bohrung oder Öffnung mit angesetztem Rohr), so werden sich die hindurchtretenden Ströme größtenteils um die Rohrwandung herum schließen und zum geringsten Teil am Ende austreten (Abb. 2b). So ergibt sich eine Möglichkeit zur Verbesserung der Abschirmung durch Einsetzen von Rohrstücken in unvermeidlichen Gehäuseöffnungen. Dagegen wird der Austritt von Gehäuseströmen erzwungen, wenn eine Leitung durch die Öffnung hindurchführt (z. B. Antenne, Abb. 2c). Gehen zwei, gegenphasige Ströme führende Leiter durch getrennte Öffnungen, so entstehen Wirbelströme (Abb. 2d), die bei Führung durch eine gemeinsame Öffnung vermieden werden.

Führt man eine eindrähtige Leitung koaxial durch ein Rohrstück, so schließt sich der auf der Innenhaut der Rohrwand erzwungene Strom um die Außenseite derselben. Wird dieser Weg gesperrt, was durch Umbildung des Rohrstückes zu einem sog. Sperrtopf² erreicht werden kann, wie ihn Abb. 3 im Schnitt zeigt, so wird gleichzeitig auch das Fließen des primären Stromes im durchlaufenden Leiter verhindert. Mit anderen Worten, der Resonanzwiderstand, der im sekundären Stromweg liegt, wird auf den primären Leiter übertragen. (Diese Vorrichtung kann als Sperre für Gleichtaktwellen auf Paralleldrahtleitungen dienen, wenn beide Drähte von einem gemeinsamen Sperrtopf umschlossen werden.) Es liegt also ein „Transformator“ vor, dessen Eigenschaften durch die Verknüpfung der Ströme bestimmt werden.

An Sendern ist es vielfach üblich, die Betriebsspannungen für die Röhren isoliert durch das Innere der als Rohre ausgebildeten Hochfrequenzleiter zuzuführen (Abb. 4). Die Gleichstromleitungen treten am Erdpunkt der Hochfrequenzkreise aus und besitzen dort von selbst Nullpotential, wenn am anderen Ende der so gebildeten koaxialen Leitung der Innenleiter auf gleichem Hochfrequenzpotential liegt wie der Außenleiter. Es findet also eine Übertragung des Spannungsabfalls vom Außenleiter auf den Innenleiter statt. Ähnliche Verhältnisse liegen bei den sog. Symmetrierungsschleifen³ vor. — Der Zusammenhang mit dem „Rohrdurchflutungssatz“ ist hier allerdings nicht auf den ersten Blick ersichtlich, er ergibt sich im Laufe unserer Betrachtungen.

2. Grundbeziehungen der „Rohrtransformation“.

Es gibt also mannigfaltige Gebilde, bei denen die Übertragungseigenschaften zwischen Rohrwand und Innenleiter von Bedeutung sind. Diesen Übertragungs-

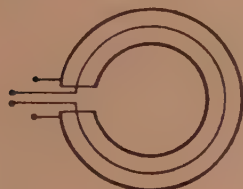


Abb. 5.

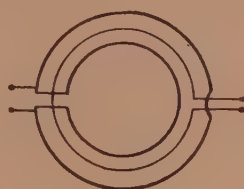


Abb. 6.

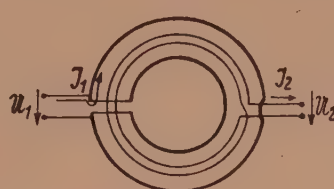


Abb. 7.

eigenschaften sind die folgenden Untersuchungen gewidmet. Um eine bequeme Darstellung zu gewinnen, denken wir uns eine koaxiale Leitung zu einem Kreisring gebogen (Abb. 5).⁴ Der so gebildete Transformator bleibt unverändert, wenn der Innenleiter durch eine Öffnung an der dem Schlitz des Ringes gegenüberliegenden Stelle ausgeführt wird (Abb. 6). Die Betrachtung sei sogleich auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Innenwindungen ausgedehnt (Abb. 7).

Die in den folgenden Ableitungen gemachten Voraussetzungen sind:

a) Die Kapazitäten zwischen den Windungen untereinander und gegen die Rohrwandung sind zu vernachlässigen.

b) Die Vorgänge im Transformator sind quasistationär.

c) Die Leiter sind verlustlos.

Unter diesen Voraussetzungen wird der Transformator nur durch den „Rohrdurchflutungssatz“ bestimmt. Deshalb mag er im folgenden „Rohrtransformator“ genannt werden.

² Dieser ist ein auf Resonanz abgestimmter Schwingungskreis, dessen Induktivität und Kapazität durch die Windungen des „Topfes“ selbst gebildet werden.

³ W. Buschbeck: Telefunken-Z. 20, Nr. 80, 11 (1939).

⁴ Die Ergebnisse gelten natürlich für jede beliebige Form einer geschirmten Leitung.

Es seien die folgenden Bezeichnungen festgesetzt: Klemmenpaar 1 („Primärseite“) am Außenrohr, Klemmenpaar 2 („Sekundärseite“) an den Innenwindungen (vgl. Abb. 7). U_1, U_2 seien die Klemmenspannungen an den Klemmen 1 bzw. 2 (in komplexer Schreibweise). Mit „Stromweg 1“ sei die Innenhaut des Rohrmantels bezeichnet, mit „Stromweg 2“ die inneren Windungen. $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ sind die die Stromwege 1 bzw. 2 durchfließenden Ströme. Der Richtungssinn der Ströme und Spannungen sei gemäß den Bezugspfeilen der Abb. 7 gewählt. Mit n bezeichnen wir die Anzahl der Innenwindungen, also das „Windungsverhältnis“ des Transformators.

Zunächst möge nur der aus den eben definierten Stromwegen 1 und 2 bestehende Vierpol betrachtet werden, d. h. der die Klemmen 1 längs der Außenfläche des Ringes verbindende Stromweg soll zur äußeren Schaltung zählen. In diesem Vierpol ist \mathfrak{J}_1 einfach der Klemmenstrom der Seite 1 (ebenso wie \mathfrak{J}_2 derjenige der Seite 2).

Nach dem „Rohrdurchflutungssatz“ ist nun

$$\mathfrak{J}_1 = -n \mathfrak{J}_2. \quad (4)$$

Die Stromübersetzung ist also von der Belastung unabhängig und nur durch das Windungsverhältnis bestimmt. Beim verlust- und streuungslosen Transformator gilt dasselbe bekanntlich von der Spannungsübersetzung. Es liegt daher die Vermutung nahe, der Rohrtransformator sei das duale Gegenstück des streuungslosen Transformators. Es wird sich zeigen, daß das tatsächlich der Fall ist.

Es ist jedoch zweckmäßig, zuvor noch einige Bemerkungen über das Dualitätsprinzip der Wechselstromtheorie einzuschleichen, welches bekanntlich auf der Gegenüberstellung der Begriffe Strom und Spannung, Widerstand und Leitwert, parallel und Serie, Leerlauf und Kurzschluß usw. beruht. Kraft dieses Prinzips geht jedes Gebilde bzw. jedes Gesetz in ein ihm dual zugeordnetes über, sobald in ihm jedes Element bzw. jeder Begriff durch das ihm dual entsprechende Gegenstück ersetzt wird. Für Netzwerke ist diese Beziehung, für welche auch der Ausdruck Widerstandsreziprozität gebräuchlich ist, darin begründet, daß die beiden Kirchhoffschen Regeln duale Gestalt haben (vgl. J. Wallot,⁵ S. 16). Die Kirchhoffschen Gesetze folgen aber unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = i, \quad (5)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \quad (6)$$

(Verschiebungsströme bleiben für die vorliegende Anwendung außer Betracht), und zwar die Knotenregel aus dem Durchflutungsgesetz (5) durch Integration um eine den Knoten einschließende geschlossene Fläche, die Maschenregel aus dem Induktionsgesetz (6) durch Bildung des Integrals über eine von der Masche umschlossene Fläche. Die Dualität ist also im Grunde genommen bereits in den Maxwell'schen Gleichungen vorgebildet. — Im folgenden wollen wir nun die Dualität zwischen dem „Rohrtransformator“ und dem streuungslosen Übertrager aufzeigen und darstellen, wie sie — ebenso wie bei den Kirchhoffschen Gesetzen — auf der Gegenüberstellung der beiden Maxwell'schen Gleichungen (5), (6) beruht.

Der allgemeine (wie stets in unseren Betrachtungen verlustfrei gedachte) Transformator ist ein zu sich selbst duales Gebilde. Es liegt dies einfach daran, daß seine „Grundgleichungen“

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \mathfrak{L}_1 \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{M} \mathfrak{J}_2, \\ -U_2 &= \mathfrak{M} \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{L}_2 \mathfrak{J}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(hier und im folgenden ist stets $\mathfrak{L}_1 = j \omega L_1$ usw., $\mathfrak{M} = j \omega L_{12}$) in die duale Form übergehen, wenn man sie nach den Strömen auflöst. Statt der Leerlaufschein-

⁵ J. Wallot: Theorie der Schwachstromtechnik, 3. Aufl. 1943.

und -kernwiderstände treten dann als Koeffizienten die entsprechenden Kurzschlußleitwerte auf (vgl. z. B. J. Wallot,⁵ S. 109).

Dagegen ist der streuungslose Transformator nicht mehr zu sich selbst dual, denn infolge der für ihn geltenden Beziehung

$$\mathfrak{M} = \sqrt{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2} \quad (8)$$

verschwindet die Determinante des Systems (7), die Umkehrgleichungen existieren nicht. Es folgt vielmehr die Proportionalität der Klemmenspannungen:

$$\frac{u_2}{u_1} = -\sqrt{\frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{L}_1}}$$

Wir stellen also diesen Fall dem „Rohrtransformator“ gegenüber und setzen beide Entwicklungen nebeneinander, um so die dualen Zusammenhänge deutlich hervortreten zu lassen. Hierbei ist natürlich die Erwähnung elementarer Tatsachen unvermeidlich.

In Abb. 8 und 9 sind die Verkettungen der beiden Transformatoren schematisch dargestellt. Beim streuungslosen Übertrager (Abb. 9) liegen die Stromwege 1 und 2

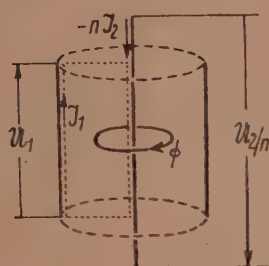


Abb. 8.

längs einer den gesamten Induktionsfluß umschließenden Kurve zueinander parallel, dagegen beim Rohrtransformator (Abb. 8) längs einer ebensolchen Linie (punktuiert eingezeichnet) hintereinander. Das wesentliche in beiden Fällen ist die Streuungslosigkeit, d. h. die Verkettung aller Strombahnen mit allen Induktionslinien, wobei beim Rohrtransformator beide Stromwege zusammen als geschlossener Kreis aufzufassen sind. Die Streuungslosigkeit ist hier, nach den obigen

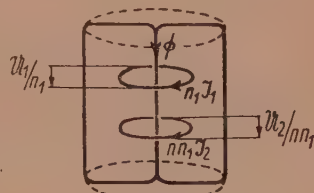


Abb. 9.

Ausführungen, durch den Skineffekt bedingt, der das Bestehen unverketteter, d. i. den Stromweg 1 umschlingender Induktionslinien verhindert.

Es werden nunmehr die Maxwell'schen Gleichungen auf diese Verkettungen angewendet.

Rohrtransformator.

Das Durchflutungsgesetz (5) in der integrierten Form

$$\int i d\mathfrak{f} = \oint \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$$

ist anzuwenden auf eine von einer magnetischen Feldlinie berandete Fläche. Diese kann entweder innerhalb ihrer Umrandungskurve aufgespannt sein, so daß sie vom Stromweg 2 durchsetzt wird, oder sie kann sich von der Umrandung nach außen bis in einen feldfreien Raum erstrecken und sich dort schließen, wobei sie der Stromweg 1 durchsetzt. In beiden Fällen ist das Linienintegral rechts dasselbe.

Streuungsloser Transformator.

Das Induktionsgesetz (6) in der integrierten Form

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$$

ist anzuwenden auf eine vom Induktionsfluß durchsetzte Fläche. Diese kann entweder vom Stromweg 1 oder vom Stromweg 2 berandet sein. In beiden Fällen ist das Flächenintegral rechts dasselbe.

Nun besteht der Querschnitt des Stromweges 1 nur aus dem Strom i_1 , dagegen derjenige des Weges 2 aus n parallelen Einzelströmen i_2 . Bei Bildung des Flächenintegrals wird daher das entsprechende Vielfache des Klemmenstromes i_2 erfaßt.

Es gilt also (bei Beachtung der Richtung der Strompfeile, Abb. 8) für die Augenblickswerte:

$$i_1 = -n i_2 = \oint \mathfrak{I} d\mathfrak{s}$$

oder bei Wechselströmen in komplexer Schreibweise (wenn die „magnetische Spannung“ mit \mathfrak{B} bezeichnet wird):

$$\mathfrak{I}_1 = -n \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{B}. \quad (9)$$

Die Proportionalität der Ströme beruht also auf der Streuungslosigkeit. Wenn erstere nicht bestehen würde, müßten unverkettete Induktionslinien auftreten.

Das Induktionsgesetz

$$\oint \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$$

ist anzuwenden auf eine von den Stromwegen berandete Fläche (punktierte Linie in Abb. 8).

Längs der Umrandungskurve liegen nun die beiden Stromwege hintereinander, und der Weg 2 besteht aus n in Serie geschalteten Windungen. Bei letzterem wird daher bei Bildung des Umlaufintegrals nur der n -te Teil der Gesamtspannung u_2 erfaßt. Daher gilt für die Augenblickswerte (bei Beachtung der Richtung der Spannungspfeile):⁶

$$u_1 + \frac{1}{n} u_2 = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$$

oder bei Wechselströmen in komplexer Schreibweise:

$$\mathfrak{U}_1 + \frac{1}{n} \mathfrak{U}_2 = j \omega \Phi. \quad (10)$$

Nun besteht die Umrandungskurve 1 aus n_1 in Serie liegenden Windungen, dagegen die Umrandungen 2 aus n -mal so vielen Windungen, wenn $n = n_2/n_1$ das Windungsverhältnis ist. Bei Bildung des Linienintegrals wird daher bei einmaligem Umlauf jeweils nur der entsprechende Teil der Klemmenspannungen u_1 bzw. u_2 erfaßt.

Es gilt also (bei Beachtung der Richtung der Spannungspfeile, Abb. 9) für die Augenblickswerte:⁶

$$\frac{u_1}{n_1} = -\frac{1}{n} \frac{u_2}{n_1} = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{f}$$

oder bei Wechselströmen in komplexer Schreibweise (wenn der „magnetische Strom“ [Fluß] mit Φ bezeichnet wird):

$$\mathfrak{U}_1 = -\frac{1}{n} \mathfrak{U}_2 = n_1 j \omega \Phi. \quad (9a)$$

Die Proportionalität der Spannungen beruht also auf der Streuungslosigkeit. In unverketteten Stromwegen würden davon abweichende Spannungen erzeugt werden.

Das Durchflutungsgesetz

$$\oint i d\mathfrak{f} = \oint \mathfrak{I} d\mathfrak{s}$$

ist anzuwenden auf eine von einer magnetischen Feldlinie berandete Fläche.

Durch den Integrationsquerschnitt führen nun die beiden Stromwege nebeneinander und der Querschnitt 1 besteht aus n_1 parallellaufenden Strömen i_1 , dagegen der Querschnitt 2 aus n -mal so vielen Strömen i_2 . Daher gilt für die Augenblickswerte (bei Beachtung der Richtung der Strompfeile):

$$n_1 i_1 + n n_1 i_2 = \oint \mathfrak{I} d\mathfrak{s}$$

oder bei Wechselströmen in komplexer Schreibweise:

$$\mathfrak{I}_1 + n \mathfrak{I}_2 = \frac{\mathfrak{B}}{n_1}. \quad (10a)$$

⁶ Für das Vorzeichen ist zu bedenken, daß u_1 , u_2 üblicherweise nicht als EMK, sondern als Verbraucherspannung gezählt werden.

Eliminieren wir nun aus (9) und (10) bzw. (9a) und (10a) die magnetischen Größen \mathfrak{B} und Φ mit Hilfe des „Ohmschen“ Gesetzes für magnetische Kreise

$$\Phi = A \mathfrak{B}, \quad (11)$$

wobei A den „magnetischen Leitwert“ bezeichnet, so erhalten wir:

$$\mathfrak{J}_1 = -n \mathfrak{J}_2 = \frac{1}{j \omega A} \left(u_1 + \frac{1}{n} u_2 \right).$$

$$u_1 = -\frac{1}{n} u_2 = n_1^2 j \omega A (\mathfrak{J}_1 + n \mathfrak{J}_2).$$

Bei sekundärem Kurzschluß, d. h. für $u_2 = 0$, wird

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{1}{j \omega A} u_1.$$

Bei sekundärem Leerlauf, d. h. für $\mathfrak{J}_2 = 0$, wird

$$u_1 = n_1^2 j \omega A \mathfrak{J}_1.$$

Der Koeffizient von u_1 ist somit der Kurzschlußscheinleitwert der Seite 1 des Vierpols und wir setzen

$$j \omega A = j \omega L_1 = \mathfrak{L}_1. \quad (12)$$

Der Koeffizient von \mathfrak{J}_1 ist somit der Leerlaufscheinwiderstand der Seite 1 des Vierpols und wir setzen

$$j \omega n_1^2 A = j \omega L_1 = \mathfrak{L}_1. \quad (12a)$$

Der entsprechende Ausdruck für Kurzschluß der Seite 2 lautet

$$j \omega n^2 A = j \omega L_2 = \mathfrak{L}_2$$

Der entsprechende Ausdruck für Leerlauf der Seite 2 lautet

$$j \omega n^2 n_1^2 A = j \omega L_2 = \mathfrak{L}_2$$

und es ist das Übersetzungsverhältnis

$$n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (13)$$

und es ist das Übersetzungsverhältnis

$$n = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (13a)$$

Als Grundgleichungen des Vierpols können wir nunmehr die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{J}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{L}_1} \left(u_1 + \frac{1}{n} u_2 \right), \\ -\mathfrak{J}_2 &= \frac{1}{n \mathfrak{L}_1} \left(u_1 + \frac{1}{n} u_2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{L}_1 (\mathfrak{J}_1 + n \mathfrak{J}_2), \\ -u_2 &= n \mathfrak{L}_1 (\mathfrak{J}_1 + n \mathfrak{J}_2). \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

Die Koeffizienten der Nebendiagonale dieser Gleichungssysteme, d. h. die „Kurzschlußkernleitwerte“ (bzw. „Leerlaufkernwiderstände“) sind einander gleich — die Vierpole gehorchen also dem „Umkehrungssatz“ — und gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden Kurzschlußscheinleitwerten (bzw. Leerlaufscheinwiderständen) — ein Ausdruck der „Streuungslosigkeit“.

Die Werte L_1 und L_2 sind also nach Obigem beim Rohrtransformator die zwischen den Klemmen der Seite 1 bzw. 2 liegende Induktivität bei Kurzschluß der jeweils anderen Seite.

Die Leerlaufparameter des Rohrtransformators sind, ebenso wie sein Wellenwiderstand, unendlich.

In der obigen Gegenüberstellung ist die vollkommene Dualität zwischen den beiden Vierpolen zum Ausdruck gekommen und man sieht, daß sie sich, wie bereits angedeutet, bis auf die Feldgleichungen zurückführen läßt. Sie beruht also im Grunde auf der in den Feldgleichungen sich ausdrückenden Polarität zwischen magnetischen und elektrischen Erscheinungen, welche ja das Gesamtgebiet des „Elektromagnetismus“ beherrscht. Daß es dabei nötig war, das Durchflutungsgesetz umgekehrt, unter Vertauschung der rechten und linken Seite, anzuschreiben, rührt daher, daß bei beiden Vierpolen nur die elektrischen, nicht die magnetischen Eigenschaften interessierten, alle Beziehungen also gewissermaßen vom elektrischen Aspekt her betrachtet wurden. — Es würde zu weit führen, hier auf diese Zusammenhänge näher einzugehen. Sie sollen an anderer Stelle in einem etwas weiteren Rahmen dargestellt werden.

3. Weitere Zusammenhänge und Ersatzbilder.

Es seien nun noch einige einfache Zusammenhänge am Rohrtransformator besprochen.

Für die Widerstandstransformation ergibt sich aus den Grundgleichungen (14) unmittelbar

$$\Re_1 = \frac{1}{n^2} \Re_2 + \Re_1 = \frac{1}{n^2} (\Re_2 + \Re_2), \quad (15)$$

wobei (gemäß den gewählten Zählrichtungen) $\Re_2 = U_2/\Im_2$ als Abschluß- und $\Re_1 = U_1/\Im_1$ als Eingangswiderstand aufzufassen sind. Es wird also einfach die Serienschaltung von \Re_2 und \Re_2 im Quadrat der Windungszahl übertragen. (Dual dazu überträgt sich beim streuungslosen Transformator bekanntlich die Parallelschaltung.)

Im Falle $n = 1$ ist dieses Verhalten auch unmittelbar leicht einzusehen: Bei dem in Abb. 5 dargestellten Aufbau des Transformators herrscht bei erdsymmetrischer

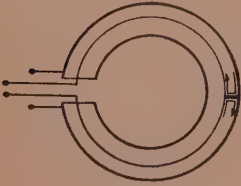


Abb. 10.

Außenschaltung im Mittelpunkt der Leiter auf beiden Stromwegen Nullpotential. Nach außen ändert sich daher nichts, wenn man hier beide Leiter durch einen Steg verbindet (Abb. 10). Nunmehr kann man sich die Ströme gemäß den eingezeichneten Pfeilen von einem auf den andern Leiter übergehend denken. Dieser Stromverlauf wird auch tatsächlich erzwungen, sobald man den Steg durch eine volle Platte ersetzt. Dadurch zerfällt der Transformator in zwei koaxiale Leitungsstücke, deren Blindwiderstände nun auch schaltungsmäßig mit den Außenkreisen in Reihe liegen. Daraus

geht gleichzeitig hervor, daß die Kurzschlußinduktivitäten $L_1 = L_2$ des Transformators nichts anderes sind als die Induktivität der koaxialen Leitung, aus der er besteht. — Entsprechendes gilt für die Induktivität L_1 auch im Falle $n \neq 1$; sie ist gleich der Induktivität des Kabels, das entsteht, wenn man sich die n Windungen zu einem einzigen Innenleiter vereinigt denkt. Denn bei Kurzschluß der Innenwindungen ist es gleichgültig, ob diese untereinander in Serie oder parallel liegen. Denkt man sie aber parallel liegend, so kann man die für $n = 1$ angestellte Überlegung anwenden.

Wir haben bisher die zwischen den Klemmen der Seite 1 liegende Induktivität L_a der äußeren Oberfläche des Außenleiters nicht in Betracht gezogen. Das ist nicht nur formal, sondern auch praktisch berechtigt, solange sie sinngemäß zur äußeren Schaltung gerechnet werden kann, wie es z. B. bei abgeschirmten Rahmenantennen der Fall ist oder dann, wenn sie durch eine auf Resonanz abgestimmte Kapazität kompensiert wird. In letzterem Falle liegt tatsächlich — im Idealfalle unendlichen Resonanzwiderstandes — zwischen den beiden Klemmenpaaren der ideale „Rohrtransformator“.

Wird jedoch L_a in den Vierpol mit einbezogen, so entsteht ein neuer Vierpol, der natürlich nicht mehr streuungslos ist, aber ebenfalls bemerkenswerte Eigenschaften besitzt. Seine Grundgleichungen entstehen aus (14) durch Vermehrung von \Im_1 um den durch L_a fließenden Strom U_1/\Re_a :

$$\begin{aligned} \Im_1 &= \left(\frac{1}{\Re_1} + \frac{1}{\Re_a} \right) U_1 + \frac{1}{n \Re_1} U_2, \\ -\Im_2 &= \frac{1}{n \Re_1} U_1 + \frac{1}{n^2 \Re_1} U_2. \end{aligned}$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach den Spannungen erhält man sie in der die Leerlaufparameter enthaltenden „Widerstandsform“:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \Re_a \Im_1 + n \Re_a \Im_2, \\ -U_2 &= n \Re_a \Im_1 + n^2 (\Re_1 + \Re_a) \Im_2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denjenigen eines gewöhnlichen, gleichsinnig

gewickelten Transformators (7) (dessen Parameter durch einen Querstrich kenntlich gemacht seien), so erkennt man, daß der Rohrtransformator mit Einbeziehung von L_a äquivalent ist einem gewöhnlichen Transformator mit den Selbst- und Gegeninduktivitäten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{L}_1 &= L_a, \\ \bar{L}_{12} &= n L_a, \\ L_2 &= n^2 (L_a + L_1) = n^2 L_a + L_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Dieser Transformator besitzt die Eigentümlichkeit, daß die Spannungsübersetzung bei Leerlauf der Seite 2, d. h. vom gespeisten Außenleiter auf die offene Innenwicklung gleich dem Windungsverhältnis n ist. Dies folgt aus (16) ohne weiteres durch Nullsetzen von \mathfrak{J}_2 , wobei zu beachten ist, daß die Zählrichtungen von U_1 und U_2 gemäß Abb. 7 entgegengesetzten Umlaufsinn haben. Zählt man sie in gleicher Richtung, so hat man $U_2/U_1 = +n$.

Liegt also an einem Rohr von beliebiger Form ein Spannungsabfall, so wird dieser, sobald ein Innenleiter vorhanden ist, in gleicher Größe und konphas auf denselben übertragen. Solange es sich dabei um eine am Rohr rein induktiv entstandene Spannung handelt, mag dies selbstverständlich erscheinen, denn Außen- und Innenleiter sind dann — bei Stromlosigkeit des letzteren — mit dem gleichen magnetischen Fluß verkettet. Es wird daher auf allen Stromwegen — Außen- und Innenhaut des Rohres und Innenleiter — dieselbe Spannung induziert. Die Beziehung gilt jedoch ganz allgemein, d. h. auch für Ohmsche Komponenten der am Rohr liegenden Spannung. Denn die Gl. (16) gelten unverändert auch dann, wie aus ihrer Herleitung hervorgeht, wenn \mathfrak{Z}_a ein beliebiger reeller oder komplexer Widerstand ist. Es tritt also auch der am Verlustwiderstand der Außenhaut des Rohres entstehende Spannungsabfall am Innenleiter wieder auf. Diese Tatsache geht ja übrigens auch schon aus den Grundgleichungen (14) (für $\mathfrak{J}_2 = 0$) hervor, denn diese sind ganz unabhängig von den Feldverhältnissen im Außenraum gewonnen.

Man kann sich von den Verhältnissen folgendes Bild machen. Durch die abschirmende Wirkung des Rohres ist dessen Innenraum von der direkten Wirkung der äußeren Felder (auch des magnetischen) völlig abgeschlossen und steht mit dem Außenraum nur an den Rohrenden in Verbindung. Herrscht nun zwischen denselben eine Potentialdifferenz, so ist sie bestrebt, einen Strom längs der Innenhaut in das Rohr zu drücken, was aber, gemäß dem „Rohrdurchflutungssatz“ nur möglich ist, wenn der gleiche Strom am Innenleiter entgegenfließt. Am offenen Innenleiter muß daher die Primärspannung wieder auftreten. Daher auch das oben festgestellte Verhalten des Rohrtransformators, als ob es sich um eine Serienschaltung der inneren Induktivität mit dem angeschlossenen Widerstand handelte.

Hier zeigt sich also ein wesentlicher Unterschied zwischen der „Rohrtransformation“ und der Wirkungsweise einer „statisch“ abgeschirmten Leitung bei Niederfrequenz, wo die Eindringtiefe groß gegen die Dicke des Mantels ist.

Ist nun der offene Innenleiter einer koaxialen Leitung an irgendeiner Stelle mit dem Rohr durch einen Kurzschluß verbunden, so herrscht, gemäß obiger Betrachtung, an jeder Stelle der Leitung auf Innen- und Außenleiter gleiches Potential. Dies gibt eine Begründung für die bekannte Tatsache, daß eine koaxiale Rohrleitung durch Anlegen einer Spannung am Außenrohr allein nicht erregt werden kann. Die Wirkungsweise der in der Einleitung besprochenen Anordnung, bei welcher die Speiseleitungen einer Hochfrequenzstufe durch das Innere der Hochfrequenzleiter geführt werden (Abb. 4), beruht auf diesem Zusammenhang.

Analoge Betrachtungen lassen sich natürlich für den Fall durchführen, daß dem Innenleiter Spannung zugeführt wird. Der Unterschied besteht nur darin, daß der

Außenleiter nicht in demselben Sinn „offen“ sein kann wie der Innenleiter, da sich der Weg über die Außenhaut nicht beseitigen läßt. Legt man aber in denselben z. B. einen Sperrtopf oder stimmt ihn durch einen Parallelkondensator auf Resonanz ab, so hat man den analogen Fall näherungsweise verwirklicht.

Für den durch (16) definierten Transformator läßt sich, wie man aus (17) ohne weiteres abliest, auch folgendes Ersatzbild angeben: ein streuungsloser Übertrager mit der primären Induktivität L_a und der sekundären $n^2 L_a$, zu welchem auf der Sekundärseite eine Selbstinduktion der Größe L_2 in Reihe liegt (Abb. 11). Der Rohrtransformator mit primär parallel liegender Außeninduktivität ist also äquivalent einem streuungslosen Transformator gleichen Windungsverhältnisses mit sekundär in Serie liegender Induktivität. Dabei vertauschen L_a und L_2 gewissermaßen ihre Rollen, die „Inneninduktivität“ (L_2) des ersteren wird zur „Außeninduktivität“ des letzteren und umgekehrt.

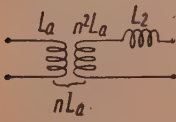


Abb. 11.

4. Anwendungen.

Die Gültigkeit der abgeleiteten Beziehungen ist an die anfangs aufgestellten drei Voraussetzungen geknüpft. Diese sind aber bei nicht zu hohen Frequenzen und entsprechender Dimensionierung des Transformators mit praktisch hinreichender Genauigkeit erfüllt, so daß der Rohrtransformator ein Hochfrequenzübertrager mit genau berechenbaren Eigenschaften ist. Durch die Möglichkeit der Abstimmung der Außeninduktivität L_a zu einem Sperrkreis gewinnt man außerdem (solange die zu übertragenden Widerstände nicht in die Größenordnung des Resonanzwiderstandes kommen) einen streuungslosen Transformator, der allerdings das etwas ungewohnte duale Verhalten zeigt.



Abb. 12.

Von den mannigfachen Abwandlungsformen koaxialer Rohrsysteme, bei denen die „Rohrtransformation“ eine Rolle spielt, wurden einige in der Einleitung besprochen. Hier sei noch auf die sog. Symmetrierungsschleifen* näher eingegangen.

Eine solche ist eine Vorrichtung, welche die Möglichkeit gibt, eine symmetrische Schaltung (Gegentaktstufe, Lecher-Leitung usw.) an eine einpolig geerdete anzuschließen. Sie besteht aus einer koaxialen Leitung, deren Außenleiter sich in zwei symmetrische Äste gabelt, wobei der Innenleiter durch den einen derselben hindurchgeführt ist, an dessen Ende A (Abb. 12) austritt und mit dem Ende B des anderen Astes verbunden ist. Da die Punkte A und B, wenn man das Gebilde von außen betrachtet, symmetrisch zum Gabelungspunkt des Rohres liegen, können sie direkt mit der Gegentaktschaltung verbunden werden; gleichzeitig bilden sie aber auch den Eingang der unsymmetrischen Kabelleitung. Ein derartiges Gebilde kann als Rohrtransformator mit der Windungszahl 1 betrachtet werden, dessen Parameter $L_1 = L_2$ die Induktivität der koaxialen Rohrleitung ist, die den einen Ast bildet. Nur liegt hier ähnlich wie in dem oben an Hand der Abb. 10 besprochenen Falle auch rein schaltungsmäßig einfach L_1 mit den beiden an A, B bzw. C, D angeschlossenen Außenschaltungen in Serie. Man kann aber auch die Klemmen A, C als die Seite 1, B, D als Seite 2 eines Rohrtransformators, der nun nur aus dem einen Ast besteht, ansehen. Zeichnet man für diesen das durch die Gl. (16) definierte Ersatzbild, wobei für L_a die Induktivität des halben Ringes einzusetzen ist, so erhält man eine Schaltung aus gewöhnlichen Selbst- und Gegeninduktivitäten (Abb. 13), die mithin ebenfalls als Symmetrierungseinrichtung verwendet werden kann.⁷ Bei dieser ist es wesentlich, daß die Gegeninduktivität zwischen

* Siehe Fußnote 3.

⁷ D. R. P. 724131 (Telefunken, W. Buschbeck und H. v. Baeyer).

den Spulen AC und BD gleich der Induktivität der beiden gleichen Spulen AC und BC ist.

Es lassen sich natürlich auch Symmetrierungsschleifen mit mehreren Windungen bauen (Abb. 14), die dann gleichzeitig zur Widerstandsanpassung der symmetrischen Schaltung an die unsymmetrische dienen können. Solche Schleifen stellen einen Rohrtransformator mit einer Windungszahl n dar, die durch die Anzahl der durch den Schlitz des Ringes hindurchlaufenden Leiter gegeben ist. Sie ist also stets eine ganze Zahl, gleichgültig, wo das Ende der Wicklung mit der inneren Wandung des Rohres verbunden ist. Es muß nämlich wegen des Rohrdurchflutungssatzes am Schlitz genau der n -fache Betrag des Windungsstromes von der Innenhaut des Rohres nach außen treten.

Solche Symmetrierungsschleifen können auch als Rahmenantennen für Peiler dienen.⁸ Gegenüber dem allgemein üblichen symmetrischen abgeschirmten Peilrahmen bieten sie die Möglichkeit des erdunsymmetrischen Anschlusses an das Gerät, was ein wesentlicher Vorteil ist, da die Schwierigkeiten der Symmetrierung von Leitungsführung und Ankopplung fortfallen. Die Symmetrie der Antenne selbst wird dadurch in keiner Weise gestört, denn gemäß den oben entwickelten Vorstellungen ist als der eigentlich aufnehmende Teil der Rahmenantenne nur die Außenhaut des Ringes zu betrachten und die am Schlitz desselben entstehende Spannung wird auf die Windungen genau in gleicher Weise übertragen, ob diese zweidrähtig oder eindrähtig durch das Verbindungsrohr zum Empfänger geführt werden. An diesem

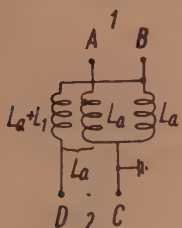


Abb. 13.



Abb. 14.

Beispiel tritt wieder mit aller Deutlichkeit der Unterschied zwischen der Funktionsweise einer „statischen Abschirmung“ (Eindringtiefe groß gegen Wandstärke), wie sie allgemein bekannt ist, und der Schirmwirkung bei Hochfrequenz (Eindringtiefe klein gegen Wandstärke) hervor. Im Sinne der ersten wäre eine Anordnung nach Abb. 12 natürlich auch nach außen grob unsymmetrisch und als Peilantenne unbrauchbar. Man wird aber allerdings die in der Hochfrequenztechnik verwendeten Abschirmungen fälschlicherweise meist nach jenem Prinzip erklärt finden.

Zusammenfassung.

Die Hochfrequenzströme, die in einem geschirmten Leitersystem fließen, sind miteinander gesetzmäßig verknüpft in dem Sinne, daß ihre Summe in jedem Augenblick Null ist. Auf dieser Gesetzmäßigkeit beruht die Wirkungsweise mannigfacher, in der Hochfrequenztechnik verwendeter, aus Rohrsystemen u. dgl. aufgebauter Gebilde. Am deutlichsten und typisch für den ganzen Erscheinungskomplex tritt diese Wirkungsweise an einem Transformator hervor, dessen eine „Wicklung“ nur durch die Innenfläche eines zum Ring gebogenen Rohres gebildet wird und dessen zweite aus in letzteres eingezogenen Windungen besteht. Ein solches Gebilde ist das duale Gegenstück des streuungslosen Übertragers, wie aus seinen Grundgleichungen hervorgeht. Nebenbei läßt die Gegenüberstellung der Verkettungen der beiden Transformatoren die Grundlage der dualen Beziehung in dem Gegensatz Elektrizitäts-Magnetismus erkennen. — Für den geschilderten Transformator lassen sich einfache Eigenschaften — wie z. B. seine Widerstandsübersetzung — und Ersatzbilder angeben.

Auf dem Prinzip dieser Transformation beruht die Funktionsweise der „Abschirmungen“, wie sie in der Hochfrequenztechnik üblich sind, die sich grundsätzlich

⁸ D. R. P. 727938 (Telefunken, H. v. Baeyer und H. Hoelzer).

von derjenigen bei niederen Frequenzen unterscheidet, wo die Hautwirkung keine Rolle spielt. Einige Beispiele erläutern diese allgemein unbeachtet gebliebenen Zusammenhänge.

Eine Anzahl hochfrequenztechnischer Gebilde, deren Funktion mit den hier dargelegten Gesetzmäßigkeiten im Zusammenhang steht, wurde seit etwa 1939 durch Patente der Firma Telefunken bekannt; nicht jedoch natürlich ihre theoretischen Grundlagen. Die vorliegende Arbeit kam, davon ganz unabhängig, in Wien zustande. Sie lag bereits seit Ende 1943 in der „Hochfrequenztechnik“ im Druck, ist jedoch infolge der Stilllegung des Zeitschriftenwesens nicht mehr erschienen.

Herrn Ing. Arnold Dietrich in Wien ist der Verfasser für manche Anregungen zu diesem Thema zu Dank verpflichtet.

(Eingegangen am 20. Mai 1947.)

(Mitteilung aus dem Schwachstrominstitut der Technischen Hochschule in Wien.)

Über lineare elektrische Übertragungssysteme.¹

Von G. Kraus, Wien.

Mit 11 Textabbildungen.

Inhaltsübersicht.

Es wird untersucht, welche Frequenzcharakteristiken durch lineare Übertragungssysteme unter Einschluß von linearen Verstärkern verwirklicht werden können. Es ergibt sich eine Größe, die in der Übertragungsrichtung nie abnimmt. Im Zusammenhange damit wird untersucht, welche Einbuße an ihrem Inhalt die Nachricht bei der Übertragung erfährt; ferner werden Probleme der Entzerrung behandelt und die Zusammenhänge mit der Laufzeit aufgezeigt.

I. Die Realisierbarkeit von Frequenzcharakteristiken.

Die Theorie linearer elektrischer Systeme ist in den letzten Jahrzehnten außerordentlich erweitert worden. Während man sich früher zur Aufgabe setzte, gewisse Typen von Schaltungen theoretisch zu untersuchen (z. B. bestimmte Arten von Wellenfiltern), werden in neuerer Zeit Versuche unternommen, die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Schaltungen und deren Eigenschaften zu erfassen. Als erstem gelang dies R. M. Foster mit seinem Reaktanztheorem.² Später folgte O. Brune mit der Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Realisierbarkeit von Scheinwiderständen durch passive Zweipole.³ Weiterhin erfolgte eine Reihe von Untersuchungen über Vierpole aus „toten“ Schaltelementen, insbesondere aus Reaktanzen, deren wichtigste Ergebnisse in dem Buch von Cauer „Theorie der linearen Wechselstromschaltungen“⁴ wiedergegeben sind. Es ist dagegen auffallend, daß fast keine allgemeinen Untersuchungen der angedeuteten Art über Schaltungen vorliegen, die auch Verstärker enthalten. Diese Lücke teilweise zu schließen, soll Aufgabe dieser Arbeit sein.

¹ Auszug aus der am 3. November 1942 an der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Hochschule Wien eingereichten Doktor-Dissertation. Die vollständige Wiedergabe der Dissertation mit allen strengen Beweisen erfolgt erst nach dem Wiedererscheinen der Elektrischen Nachrichten-Technik.

² R. M. Foster: A Reactance Theorem. Bell System techn. J. **3**, 259 (1924).

³ O. Brune: J. Math. Physics **10**, 3 (1931).

⁴ W. Cauer: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. I. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1941.

Im folgenden werden lineare Übertragungssysteme untersucht, die aus endlich vielen diskreten Schaltelementen bestehen (quasistationäre Systeme);⁵ die Schaltelemente seien ideal angenommen. Die Verstärker seien rückwirkungsfrei und frequenzunabhängig, was bei Verstärkerröhren im Tonfrequenzbereich auch praktisch mit genügender Genauigkeit zutrifft, sie brauchen aber von vornherein keineswegs eine unendlich große Verstärkung und auch keine unendlich großen oder unendlich kleinen Eingangs- und Ausgangswiderstände zu haben. Denn durch Hintereinanderschalten von Verstärkern und durch Anwendung von Mit- und Gegenkopplung lassen sich die Daten der Verstärker beliebig verändern. Dies ist leicht einzusehen, da man aus rückgekoppelten Verstärkern negative Widerstände herstellen kann, mit denen positive Widerstände kompensiert werden können.

Ein lineares Übertragungssystem wird in seinen elektrischen Eigenschaften vollständig und eindeutig durch seine Frequenzcharakteristik beschrieben. Bezeichnet man die Eingangsspannung mit u_e und die Ausgangsspannung mit u_a , so gilt für reine Sinusspannungen:

$$u_e = U_e \cdot e^{j\omega t}, \quad u_a = U_a \cdot e^{j\omega t},$$

$$U_a = \varphi(j\omega) \cdot U_e,$$

wobei $\varphi(j\omega)$ die Frequenzcharakteristik des Übertragungssystems ist. Besteht das Übertragungssystem aus mehreren in Kette geschalteten Teilen, so ist die gesamte Frequenzcharakteristik gleich dem Produkt der Frequenzcharakteristiken der Teile.

Schreiben wir für $j\omega$ den Frequenzparameter λ , so folgt aus den Kirchhoffschen Gesetzen, daß $\varphi(\lambda)$ eine rationale Funktion von λ ist und sich als Quotient zweier Polynome in λ anschreiben läßt:

$$\varphi(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)},$$

wobei alle Koeffizienten reell sind, daher ist für reelle λ auch $\varphi(\lambda)$ reell.

Wir wollen nun im weiteren den Fall betrachten, daß U_e eine Urspannung sei; dann charakterisieren die Nullstellen β_i des Nennerpolynoms

$$Q(\beta_i) = 0$$

die Eigenschwingungen des Übertragungssystems $\Sigma C_i \cdot e^{\beta_i t}$ mit beliebigen Integrationskonstanten C_i . Das Übertragungssystem ist nun sicher nur dann brauchbar, wenn es stabil ist, d. h. wenn alle Eigenschwingungen abklingen, es muß also für alle β_i gelten:

$$\operatorname{Re} \beta_i < 0.$$

Weiterhin läßt sich zeigen,⁴ daß sich ausschließlich durch Anwendung von Rückkopplungsschaltungen o. dgl. ein höherer Grad des Zählerpolynoms als der des Nennerpolynoms erreichen läßt, indem dadurch ein oder mehrere β_i gegen ∞ streben. Bei einer noch so kleinen Veränderung der Daten der Schaltelemente (z. B. Steilheit der Röhren) rückt aber ein solches β_i aus dem unendlich fernen Punkt heraus und kann endlich groß mit positivem Realteil werden; das Übertragungssystem würde damit instabil.

Daher kann als notwendige Bedingung für die Realisierbarkeit einer Frequenzcharakteristik der Satz aufgestellt werden: $\varphi(\lambda)$ ist eine rationale Funktion von λ , die für reelle λ reell ist, mit beliebig gelegenen Nullstellen und Polen ausschließlich in der offenen linken λ -Halbebene (d. h. unter Aus-

⁵ Die Verallgemeinerung auf Systeme mit unendlich vielen Schaltelementen oder mit verteilten Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen mag im Grenzübergang erfolgen, doch wird hier nicht näher darauf eingegangen.

schluß der imaginären λ -Achse und des unendlich fernen Punktes) (Abb. 1). Wir wollen eine solche Funktion eine „stabile Funktion“ nennen.

Diese notwendige Realisierbarkeitsbedingung gilt nicht nur für eine Frequenzcharakteristik zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung, sondern auch genau so zwischen Ausgangsstrom und Eingangsstrom. Wir wollen daher im weiteren kurz von Ausgangs- oder Empfangssignal \mathfrak{x}_a und von Eingangs- oder Sendesignal \mathfrak{x}_e sprechen, die durch die Frequenzcharakteristik $\varphi(j\omega)$ verknüpft sind,

$$\mathfrak{x}_a = \varphi(j\omega) \cdot \mathfrak{x}_e,$$

wobei unter Eingangssignal stets eine Urspannung oder ein Urstrom verstanden werden soll, also kurz eine „Ursache“.

Die notwendige Realisierbarkeitsbedingung läßt sich auch so aussprechen: $\varphi(\lambda)$ ist eine rationale Funktion von λ , die für reelle λ reell und für $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ beschränkt ist. In dieser Form kann die Bedingung auch auf Übertragungssysteme mit verteilten Induktivitäten, Kapazitäten und Widerständen ausgedehnt werden, wenn man statt „rational“ das Wort „meromorph“ schreibt.

Abb. 1. λ -Ebene. 0: Nullstellen α_i ,
x: Pole β_i .

Um nun zu zeigen, daß die notwendige Bedingung der Frequenzcharakteristik auch hinreichend für ihre Realisierbarkeit ist, genügt es, ein Schema für die Verwirklichung anzugeben.

Da eine solche stabile Funktion $\varphi(\lambda)$ bei $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ keinen Pol hat, ist sie dort regulär und daher ist auch ihr Realteil $\operatorname{Re} \varphi(\lambda)$ beschränkt. Es kann daher stets eine positive reelle Zahl M so angegeben werden, daß für $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\operatorname{Re} \varphi(\lambda) + M = \operatorname{Re} [\varphi(\lambda) + M] > 0.$$

Wie groß M mindestens sein muß, läßt sich unmittelbar aus der Ortskurve der Frequenzcharakteristik ablesen.

Nun erfüllt die Funktion $Z_2 = 2 \cdot [\varphi(\lambda) + M]$ alle nach O. Brune³ notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Realisierbarkeit als Scheinwiderstand eines Zweipoles aus toten Schaltelementen, nämlich:

- sie ist für reelle λ reell;
- sie ist für $\operatorname{Re} \lambda > 0$ regulär;
- sie hat für $\operatorname{Re} \lambda > 0$ positiven Realteil.

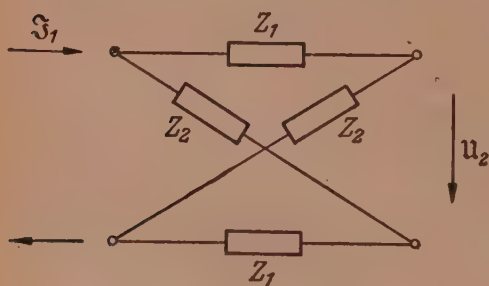


Abb. 2. Brückenschaltung.



Abb. 3. Gesamtschaltung.

Nach Cauer werden solche Funktionen „positiv“ genannt. Die Frequenzcharakteristik $\varphi(\lambda)$ kann somit durch folgende Brückenschaltung realisiert werden (Abb. 2).

Es ist

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot (Z_2 - Z_1) \cdot J_1.$$

Wählt man $Z_2 = 2 \cdot [\varphi(j\omega) + M]$ und als konstanten Ohmschen Widerstand $Z_1 = 2M$, so ist

$$U_2 = \varphi(j\omega) \cdot J_1.$$

Diese Frequenzcharakteristik zwischen Ausgangsspannung und Eingangsstrom des Kreuzgliedes gilt zunächst nur für Leerlauf, doch kommt man sofort auf den Betriebsfall des Abschlusses durch einen Ohmschen Widerstand, wenn man das Kreuzglied an einen Verstärker (II) anschließt, dessen Eingangswiderstand unendlich groß gemacht ist. Der Verstärker sei dann mit einem Ohmschen Widerstand R_2 abgeschlossen (Abb. 3).

Ebenso läßt sich vor das Kreuzglied ein Verstärker (I) schalten, dessen Innenwiderstand unendlich groß gemacht ist. Dem Ohmschen Eingangswiderstand R_1 kann irgendein positiver Wert gegeben werden.

Damit ist nachgewiesen, daß die Frequenzcharakteristik eines linearen Übertragungssystems eine stabile Funktion des Frequenzparameters ist und sein muß. Aus dem Obigen folgt auch, daß sich jede stabile Funktion darstellen läßt als Summe einer positiven Funktion und einer reellen Konstanten. Das heißt z. B., daß jede Ortskurve der Frequenzcharakteristik eines stabilen Übertragungssystems dargestellt werden kann als Ortskurve des Scheinwiderstandes eines Zweipoles aus toten Schaltelementen mit in der Abszissenrichtung verschobenem Ursprung.

Im übrigen läßt sich auch zeigen, daß sich jede beliebige stabile Funktion $\varphi(j\omega) = \frac{\mathfrak{z}_a}{\mathfrak{r}_a}$ dann und nur dann an einem vorgegebenen Abschluscheinwiderstand $\mathfrak{R}_a(j\omega)$ realisieren läßt, wobei \mathfrak{z}_a die an ihm auftretende Ausgangsspannung ist, wenn $\frac{1}{\mathfrak{R}_a(\lambda)}$ eine stabile Funktion ist (d. h. reell für reelle λ und beschränkt für $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$). Ist \mathfrak{z}_a der durch \mathfrak{R}_a fließende Strom, so gilt analog, daß $\mathfrak{R}_a(\lambda)$ eine stabile Funktion sein muß. Ähnliche Sätze lassen sich auch für den Innenwiderstand des am Eingang des Übertragungssystems angeschalteten aktiven Zweipoles aufstellen.

II. Irreversibilität der Nachrichtenübertragung.

Wir wollen davon ausgehen, daß wir zwei hintereinander geschaltete Verstärkerstufen betrachten. Wenn die erste Verstärkerstufe die übertragene Nachricht irreversibel verändert, so ist es jedenfalls unmöglich, daß ihre Frequenzcharakteristik $\varphi_1(\lambda)$ durch die zweite Verstärkerstufe mit der Frequenzcharakteristik $\varphi_2(\lambda)$ vollständig entzerrt wird, d. h., es könnte dann kein $\varphi_2(\lambda)$ realisiert werden, das die Bedingung

$$\varphi_2(\lambda) = \frac{1}{\varphi_1(\lambda)}$$

erfüllt.

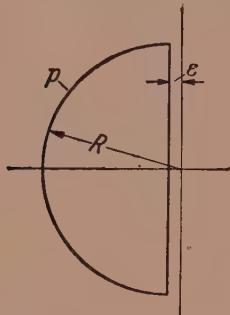
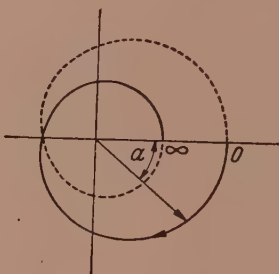
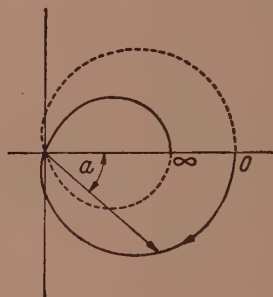
Die Realisierung von $\varphi_2(\lambda)$ ist nun tatsächlich nicht immer möglich. $\varphi_2(\lambda)$ müßte dort, wo $\varphi_1(\lambda)$ Pole hat, Nullstellen aufweisen und an den Nullstellen von $\varphi_1(\lambda)$ Pole besitzen. Während ersteres immer möglich ist, können nur jene Nullstellen von $\varphi_1(\lambda)$ als Pole von $\varphi_2(\lambda)$ nachgebildet werden, deren Realteil kleiner als Null ist, die also in der offenen linken λ -Halbebene liegen, da ja sonst die zweite Verstärkerstufe instabil wäre. Alle anderen Nullstellen von $\varphi_1(\lambda)$ können niemals mehr „entzerrt“ werden. Man sieht, daß die Ursachen für die Irreversibilität, und zwar die einzigen, die Nullstellen von $\varphi_1(\lambda)$ sind, die in der abgeschlossenen rechten λ -Halbebene liegen (d. h. mit Einschluß der imaginären λ -Achse und des unendlich fernen Punktes). Wir wollen diese Nullstellen α_p kurz „positive Nullstellen“ nennen. Bei mehreren hintereinander geschalteten Verstärkerstufen können daher diese positiven Nullstellen, vom Eingangssignal

aus gesehen, in der Übertragungsrichtung nie verschwinden, sondern nur zunehmen. Wir wollen ihre Zahl S die Richtungszahl nennen; sie nimmt in der Übertragungsrichtung nur zu. Ist $S > 0$, so ist die Frequenzcharakteristik „gerichtet“, für $S = 0$ „ungerichtet“.

Die Richtungszahl kann leicht aus der Ortskurve der Frequenzcharakteristik entnommen werden, wie nun gezeigt wird. Da $\varphi(\lambda)$ eine rationale Funktion ist, gilt für sie der Satz aus der Funktionentheorie,⁴ daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_p \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} d\lambda = N - P$$

über die im entgegengesetzten Uhrzeigersinn durchlaufene, geschlossene Kurve p gleich der Zahl der Nullstellen, weniger der Zahl der Pole von $\varphi(\lambda)$ in dem von der

Abb. 4. λ -Ebene.Abb. 5. $S = 2$; $\int da = 4\pi$.Abb. 6. $S = 2$; $\int da = 4\pi$.

Kurve p eingeschlossenen Bereich ist, oder auch gleich der Zahl der Pole, weniger der Zahl der Nullstellen außerhalb der Kurve p (mit Berücksichtigung des unendlich fernen Punktes).

Wenn wir der Kurve p die Form nach Abb. 4 geben und ε gegen Null und R gegen Unendlich streben lassen, so liegen außerhalb p nur Nullstellen von $\varphi(\lambda)$, nämlich die positiven Nullstellen. Daher gilt

$$S = -\frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_p \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} d\lambda.$$

Wie sich weiter zeigen läßt, verschwindet das Integral über den unendlich großen Halbkreis (Radius R). Wenn wir zunächst annehmen, daß keine Nullstellen auf der imaginären λ -Achse liegen, so ist also

$$S = -\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} d\lambda.$$

Schreiben wir weiter

$$\varphi(j\omega) = e^{-g(j\omega)} = e^{-b(j\omega) - ja(j\omega)},$$

so erhalten wir schließlich

$$S = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{d\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int da.$$

Das 2π -fache der Richtungszahl ist also gleich der Zunahme des Winkelmaßes a zwischen $\omega = -\infty$ und $\omega = +\infty$ (Abb. 5).

Liegen Nullstellen von $\varphi(\lambda)$ auf der imaginären λ -Achse oder im unendlich fernen Punkt der λ -Ebene, so macht das Winkelmaß bei diesen Nullstellen einen Sprung von 180° , bzw. einem Vielfachen davon (Abb. 6). Wenn wir uns aber erinnern, daß wir nicht entlang der imaginären λ -Achse integrieren, sondern nach Abb. 4 unmittelbar links daneben, so müssen wir die Feststellung treffen, daß der Sprung immer als Zuwachs des Winkelmaßes zu zählen ist, wenn wir die Irreversibilität untersuchen.

Es gilt daher der Satz: Die Richtungszahl S eines Übertragungssystems ist gleich der Zahl der Umschlingungen des Koordinatenursprunges durch die Ortskurve der Frequenzcharakteristik von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$. Nulldurchgänge der Ortskurve sind als Umschlingungen zu zählen. Diese Zahl ist nie negativ und kann bei Hintereinanderschaltungen von Verstärkerstufen nur wachsen.

Weiterhin: Die Entscheidung, ob ein Übertragungssystem die Nachricht irreversibel verändert, kann sofort beim Betrachten der Ortskurve der Frequenzcharakteristik entschieden werden, ebenso der Grad der Irreversibilität S (Zahl der positiven Nullstellen).

Das Umschlingen eines Punktes durch die Ortskurve wurde schon von H. Nyquist⁶ und F. Strecker⁷ benutzt, jedoch in anderem Sinne, nämlich als Kriterium für die Stabilität, während hier Stabilität Voraussetzung ist.

Bisher betrachteten wir lediglich hintereinander in Kette geschaltete Verstärkerstufen. Wenn wir zum allgemeinsten Fall irgendwelcher in Kette miteinander geschalteter Vierpole übergehen, so tritt als einziger Unterschied der auf, daß es möglich ist, daß positive Nullstellen der Frequenzcharakteristik an einer Stelle der Schaltung nicht nur durch den vorhergehenden Teil der Schaltung verursacht werden können, sondern auch durch positive Nullstellen (bzw. Pole) des Klemmenscheinwiderstandes des nachfolgenden Teiles des Übertragungssystems. Die genaue Untersuchung führt zu folgendem Ergebnis:

Positive Nullstellen der Frequenzcharakteristik zwischen einer Klemmenspannung (-strom) und dem Sendesignal ohne gleichzeitiges Verschwinden des Klemmenscheinwiderstandes (-leitwertes), also Nullstellen von Klemmenspannung und -strom, verschwinden in der Übertragungsrichtung nie mehr.

Positive Nullstellen bzw. die Richtungszahl der Frequenzcharakteristik können nie abnehmen, wenn irgendwo zwischen Sende- und Empfangssignal neue Vierpole in Kette geschaltet werden.⁸

Die Tatsache der Irreversibilität stellt folgende Fragen in den Vordergrund, die der Reihe nach behandelt werden sollen.

1. Erfährt die Nachricht beim Durchlaufen eines Übertragungssystems mit von Null verschiedener Richtungszahl eine unwiederbringliche Einbuße an ihrem Inhalt?
2. Inwieweit kann ein Übertragungssystem entzerrt werden?
3. Welche Beziehungen bestehen zwischen der Richtungszahl und einer anderen Größe, die auch in der Übertragungsrichtung dem Sinne nach nicht abnehmen kann, nämlich der Laufzeit?

III. Verlust an Nachrichteninhalt bei der Übertragung.

Bei der Übertragung geht sicher nichts an Nachrichteninhalt verloren, wenn es möglich ist, aus dem zeitlichen Verlauf des Empfangssignales $x_a(t)$ den zeitlichen Verlauf des Sendesignales $x_e(t)$ eindeutig zu ermitteln. Selbstverständlich ist diese Ermittlung unmöglich, wenn man über die Art des Übertragungssystems nichts

⁶ H. Nyquist: Regeneration Theory. Bell System. techn. J. 11, 126 (1932).

⁷ F. Strecker: Unveröffentlichter Hinweis in W. Artus: Über Regelmethode in steuerbaren elektrischen Systemen und die Kriterien ihrer Stabilität. Elektr. Nachr.-Techn. 17, H. 10, 231 (1940).

⁸ „In Kette schalten“ soll heißen, daß über den neuen Vierpol der einzige elektrische Verbindungsweg vom Sende- zum Empfangsort führt.

weiß. Das Problem hat nur einen Sinn, wenn man die elektrischen Eigenschaften des Übertragungssystems kennt, also insbesondere seine Frequenzcharakteristik:

$$\varphi(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}; \quad P(j\omega) \cdot x_e = Q(j\omega) \cdot x_a.$$

Wie aus der Ableitung der Frequenzcharakteristik aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt, ist der zeitliche Verlauf von Sende- und Empfangssignal durch eine Differentialgleichung verknüpft, die man erhält, indem in der Frequenzcharakteristik der Frequenzparameter λ durch den Differentialoperator $\frac{d}{dt}$ ersetzt wird:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot x_e = Q\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot x_a.$$

Wie man sieht, erhält man umgekehrt aus dieser Differentialgleichung die Frequenzcharakteristik, wenn für Sende- und Empfangssignal Sinusfunktionen angenommen werden.

Ist das Empfangssignal $x_a(t)$ bekannt, so kann man durch Auflösen dieser Differentialgleichung das Eingangssignal $x_e(t)$ ermitteln. Die Lösung von x_e ist aber nur bestimmt bis auf eine Funktion

$$x_0 = C_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 t} + \dots + C_r \cdot e^{\alpha_r t}$$

mit unbestimmten Koeffizienten C_1, C_2, \dots, C_r , wobei die α_i die (untereinander als verschieden vorausgesetzten) Wurzeln der Gleichung $P(\lambda) = 0$, also die Nullstellen der Frequenzcharakteristik sind. Kennt man das Empfangssignal und nimmt man willkürlich eine die Differentialgleichung befriedigende Lösung x_p für das Sendesignal an — ein partikuläres Integral —, so kann das wirkliche Eingangssignal im allgemeinen sein:

$$x_e = x_p + x_0.$$

Denken wir uns, wir hätten bei der Annahme des x_p einen Fehler mit den Konstanten C_1, C_2, \dots, C_r gemacht. Wir können dann zwei Fälle unterscheiden:

1. Haben alle α_i negativen Realteil, ist also die Frequenzcharakteristik ungerichtet, so wird der Fehler mit der Zeit immer kleiner. Da im Übertragungssystem der höchstmögliche Fehlerwert beschränkt ist — z. B. durch die Nichtlinearität der Röhrenkennlinien —, so ist man sicher, daß der Fehler im Momentanwert des Sendesignals $x_e(t)$ kleiner ist als ein beliebig klein vorgegebener Wert, wenn man nur seit genügend langer Zeit das Empfangssignal $x_a(t)$ beobachtet hat.

2. Gibt es ein oder mehrere α_i mit positivem Realteil, die Anzahl dieser α_p ist S (gerichtete Frequenzcharakteristik), so ist man über den Momentanwert des Sendesignals im unklaren, auch wenn man das Empfangssignal schon seit noch so langer Zeit beobachtet hat. Der Grad der Unbestimmtheit ist durch die Richtungszahl S gegeben. Es ist ohne weiteres klar, daß diese Unsicherheit in der Übertragungsrichtung nie abnehmen kann.

Wir können also sagen: Dann und nur dann, wenn die Frequenzcharakteristik ungerichtet ist, läßt sich bei Kenntnis des Übertragungssystems das Sendesignal stets mit beliebiger Genauigkeit aus dem Empfangssignal ermitteln, wenn man dieses schon seit genügend langer Zeit vorher beobachtet hat. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß diese Ermittlung auch immer auf elektrischem Wege möglich ist, indem solche Übertragungssysteme stets vollkommen entzerrt werden können.

Das Vorhandensein positiver Nullstellen α_p der Frequenzcharakteristik bedeutet insofern einen Verlust an Nachrichteninhalt, als zwei Sendesignale, die sich bis zum Beobachtungszeitpunkt um Funktionen der Art $C_p \cdot e^{\alpha_p t}$ unterscheiden, am Empfangs-

ort genau gleich wiedergegeben werden. Dies ist aber auch der einzige unwiederbringliche Verlust, den die Nachricht bei der Übertragung erleidet. Die einzelnen positiven Nullstellen werden je nach ihrer Lage in der λ -Ebene verschieden zu bewerten sein sowie auch je nach der Art der übertragenen Nachricht und des Empfangsorganes. Es sei jedoch hervorgehoben, daß diese positiven Nullstellen nicht direkt ein Maß für die Güte des Übertragungssystems darstellen.

IV. Entzerrung.

1. Allgemeines.

Schaltet man in Kette zum Übertragungssystem mit der Frequenzcharakteristik $\varphi(\lambda)$ ein zweites System mit der Frequenzcharakteristik $\varphi_z(\lambda)$, welches fürs erste mit einer rückwirkungsfreien Verstärkerstufe beginnen soll (Abb. 7), so wird die Frequenzcharakteristik der Gesamtanordnung

$$\frac{\mathfrak{E}_z}{\mathfrak{E}_e} = \varphi(\lambda) \cdot \varphi_z(\lambda) = \varphi_r(\lambda).$$

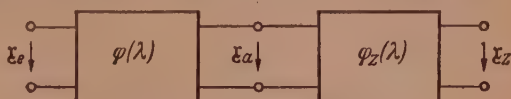


Abb. 7. Entzerrerschaltung.

Das Problem der Entzerrungsmöglichkeit ist gleichbedeutend mit dem Aufsuchen

der allgemeinsten resultierenden Frequenzcharakteristik $\varphi_r(\lambda)$, die sich bei gegebenem $\varphi(\lambda)$ durch irgendeine Entzerrerschaltung $\varphi_z(\lambda)$ herstellen läßt.⁹

Da sich jedes stabile $\varphi_z(\lambda)$ verwirklichen läßt, ist die Gesamtheit der resultierenden Frequenzcharakteristiken $\varphi_r(\lambda)$ das Produkt von $\varphi(\lambda)$ mit einer beliebigen stabilen Funktion von λ . Es lassen sich somit solche und nur solche stabilen Frequenzcharakteristiken $\varphi_r(\lambda)$ realisieren, die zumindest dieselben positiven Nullstellen haben wie $\varphi(\lambda)$.

Die Untersuchung des allgemeinen Falles, daß die Entzerrerschaltung nicht mit einer Verstärkerstufe beginnt, sei hier nicht näher ausgeführt. Bedeutet \mathfrak{E}_a nach Abb. 7 die Klemmenspannung (-strom), so ergibt sich folgender Satz: Es lassen sich solche und nur solche resultierenden Frequenzcharakteristiken verwirklichen, die mindestens dieselben positiven Nullstellen haben, wie die Frequenzcharakteristik des Übertragungssystems für sich, wenn es mit irgendeinem stabilen Scheinleitwert (-widerstand) abgeschlossen ist, sofern es nur dabei selbst stabil ist. Aus der Gesamtheit aller möglichen resultierenden Frequenzcharakteristiken kann in jedem Einzelfall die günstigste ausgesucht werden.

2. Vollkommene Entzerrung.

Der wichtigste Sonderfall ist die vollkommene Entzerrung. In diesem Fall ist die resultierende Frequenzcharakteristik eine reelle Konstante. Aus dem obigen Satz ergibt sich unmittelbar: Eine vollkommene Entzerrung ist dann und nur dann möglich, wenn die Frequenzcharakteristik des mit einem stabilen Scheinleitwert (-widerstand) abgeschlossenen Übertragungssystems ungerichtet ist.

Für ein vollkommen entzerrtes System ist die entzerrte Ausgangsspannung stets proportional der Eingangsspannung, wenn nur alle Eigenschwingungen abgeklungen sind, d. h., wenn das System genügend lange vor Übertragung der Nachricht eingeschaltet worden ist. Man sieht also, daß die Ermittlung des Sendesignals aus dem

⁹ Die Entzerrungsmöglichkeiten durch Eingriffe in die Schaltung des Übertragungssystems $\varphi(\lambda)$ selbst sollen hier nicht behandelt werden.

Empfangssignal bei ungerichteter Frequenzcharakteristik des Übertragungssystems stets auf elektrischem Wege möglich ist, wie in Abschnitt III erwähnt wurde.

3. Dämpfungs- und Phasenentzerrung.

Ein Übertragungssystem ist vollkommen dämpfungsentzerrt, wenn der Absolutbetrag der resultierenden Frequenzcharakteristik für alle reellen Frequenzen konstant ist. Denken wir uns Zähler- und Nennerpolynom der resultierenden Frequenzcharakteristik in Wurzelfaktoren zerlegt und fassen wir sie paarweise zusammen

$$\varphi(\lambda) \cdot \varphi_z(\lambda) = \varphi_r(\lambda) = \prod_i \varphi_i(\lambda); \quad \varphi_i(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha_i}{\lambda - \beta_i}.$$

Um vollkommene Dämpfungsentzerrung zu erreichen, muß für alle i gelten

$$|\varphi_i(j\omega)| = \left| \frac{j\omega - \alpha_i}{j\omega - \beta_i} \right| = \text{const.}$$

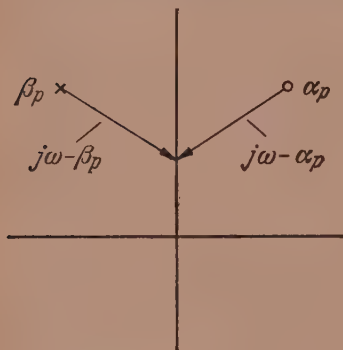


Abb. 8. λ -Ebene.

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn

$$\text{Re } \alpha_i = \pm \text{Re } \beta_i; \quad \text{Im } \alpha_i = \text{Im } \beta_i.$$

Das positive Vorzeichen bedeutet Gleichheit von Nullstelle und Pol $\alpha_i = \beta_i$, das negative Vorzeichen ist durch die Abb. 8 wiedergegeben.

Um Dämpfungsentzerrung für alle reellen Frequenzen zu erreichen, müssen die Nullstellen und Pole von $\varphi(\lambda)$ sowie von $\varphi_z(\lambda)$ in bestimmter Beziehung zueinander stehen, damit die obigen Bedingungen für die resultierende Frequenzcharakteristik erfüllt sind. Die negativen Nullstellen bzw. Pole des zu entzerrenden

Systems können durch gleiche Pole bzw. Nullstellen des Entzerrersystems kompensiert werden. Den positiven Nullstellen α_p des zu entzerrenden Systems haben Pole β_p des Entzerrersystems zu entsprechen, wie sie in Abb. 8 dargestellt sind. Wegen der Stabilität des Gesamtsystems sind allerdings Pole β_p auf der imaginären λ -Achse auszuschließen, daher können auch Nullstellen α_p nicht unwirksam gemacht werden, wenn sie auf der imaginären λ -Achse liegen (Nullstellen bei reellen Frequenzen). Damit können wir sagen:

Die Dämpfungsentzerrung ist für alle reellen Frequenzen dann und nur dann möglich, wenn die Ortskurve der Frequenzcharakteristik des zu entzerrenden Systems nicht durch den Koordinatenursprung geht.

Die Dämpfungsentzerrung ist nicht nur auf eine Art möglich. Z. B. kann irgendein beliebiges, rein phasendrehendes System, dessen Pole und Nullstellen wie in Abb. 8 liegen, in Kette geschaltet werden, ohne daß die Dämpfung geändert wird. Die oben angegebene Durchführung liefert allerdings eine resultierende Frequenzcharakteristik von kleinster Richtungszahl.

Aus den obigen Überlegungen geht auch folgender Satz hervor: Jeder mögliche Dämpfungsverlauf in Abhängigkeit von der Frequenz läßt sich realisieren durch Kettenschaltung eines Systems mit einer eindeutig gegebenen Frequenzcharakteristik von minimaler Richtungszahl (welche gleich der Zahl der Dämpfungspole bei reellen Frequenzen ist) mit einem beliebigen rein phasendrehenden System.

Die Phasenentzerrung für alle reellen Frequenzen ist nur bei ungerichteten Frequenzcharakteristiken möglich. Dies geht schon daraus hervor, daß die Richtungszahl S , die durch

$$S = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{da}{d\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int da$$

gegeben ist, durch Kettenschaltung eines Entzerrers nicht kleiner gemacht werden kann. Ähnliche Untersuchungen, wie wir sie für die Dämpfungsentzerrung durchgeführt haben, führen zu dem Ergebnis, daß die Phasenentzerrung für alle reellen Frequenzen mit der vollkommenen Entzerrung identisch ist.

V. Laufzeit.

Die Tatsache, daß gewisse Größen (nämlich die positiven Nullstellen der Frequenzcharakteristik) in der Übertragungsrichtung nie abnehmen, läßt vermuten, daß Beziehungen zur Laufzeit bestehen, die das Signal bei der Übertragung erfährt; denn auch die Laufzeit kann dem Sinn nach in der Übertragungsrichtung höchstens zunehmen. Von einer Laufzeit im strengen Sinne kann man nur dort sprechen, wo sich der zeitliche Ablauf des Sendesignals in derselben Form, aber um eine bestimmte Zeit verspätet, am Empfangsort wiederholt. Im allgemeinen ist aber das Empfangssignal in der Form mehr oder weniger vom Sendesignal verschieden, so daß man den Laufzeitbegriff umfassender definieren muß. An Hand einiger Laufzeitbegriffe wird im folgenden die Bedeutung der positiven Nullstellen der Frequenzcharakteristik untersucht.

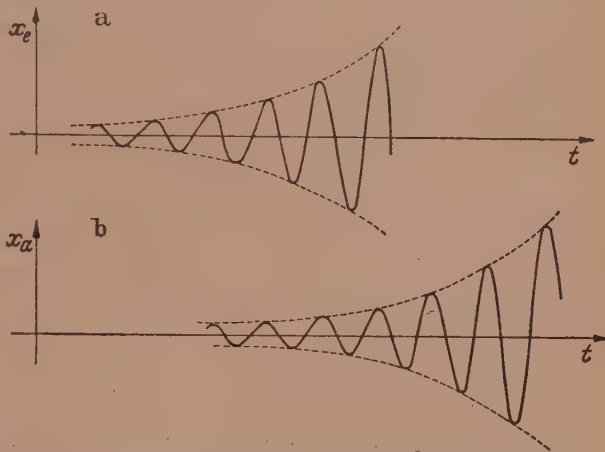


Abb. 9. Übertragung von anklingenden Schwingungen.

Nehmen wir an, das Sendesignal hätte im Intervall $-\infty < t \leq t_b$ (t_b sei irgendein Beobachtungszeitpunkt) die Form einer Exponentialfunktion

$$x_e = \operatorname{Re} [\tilde{x}_e \cdot e^{\lambda t}].$$

Dieser Ansatz hat nur einen Sinn, wenn λ einen positiven Realteil hat; den zeitlichen Verlauf stellt Abb. 9a dar.

Das Empfangssignal ist dann ebenfalls eine Exponentialfunktion, Abb. 9b

$$x_a = \operatorname{Re} [\tilde{x}_a \cdot e^{\lambda t}],$$

wobei gilt:

$$\tilde{x}_a = \varphi(\lambda) \cdot \tilde{x}_e.$$

Je kleiner $\varphi(\lambda)$ ist, desto weiter erscheint das Empfangssignal gegenüber dem Sendesignal nach rechts verschoben. Da ein konstanter Faktor bei $\varphi(\lambda)$ eine derartige Verschiebung bewirken kann, läßt sich unmittelbar daraus noch keine eindeutige Beziehung zur Laufzeit erkennen. Lassen wir aber $\varphi(\lambda)$ gegen Null streben, so wandert das Bild von Abb. 9b in der Richtung der positiven Abszissenachse ins Unendliche, so, als ob die Laufzeit unendlich groß wäre. Wir können also die positiven Nullstellen α_p der Frequenzcharakteristik als „Laufzeitpole“ auffassen, d. h. die Laufzeit von Funktionen der Art $C_p \cdot e^{\alpha_p \cdot t}$ ist unendlich groß. Diese Interpretation ist allerdings an bestimmte Sendesignale gebunden.

Eine weitere Beziehung läßt sich zur Gruppenlaufzeit¹⁰ des Übertragungssystems feststellen. Die Gruppenlaufzeit ist definiert

$$\tau_g = \frac{da}{d\omega}.$$

¹⁰ H. Feldtkeller: Die Gruppenlaufzeit elektrischer Übertragungssysteme. Veröff. Nachr.-Techn. 5, 1, Folge, 21 (1935).

In Abschnitt II wurde für die Richtungszahl S , die die Summe aller positiven Nullstellen darstellt, gefunden:

$$2\pi S = -\infty \int^{+\infty} \frac{da}{d\omega} d\omega = -\infty \int^{+\infty} \tau_g d\omega,$$

d. h.: Das Integral der Gruppenlaufzeit über alle Frequenzen ist gleich der Richtungszahl mal 2π .

Es wurde stets als störend empfunden, daß die Gruppenlaufzeit bei manchen Frequenzen auch negativ sein kann, was dem Sinn einer Laufzeit widerspricht. Es zeigt sich jedoch, daß wenigstens das Integral der Gruppenlaufzeit über alle Frequenzen nie negativ ist und in der Übertragungsrichtung nur zunehmen kann. Bestenfalls ist es Null bloß bei ungerichteten Frequenzcharakteristiken. Es ist übrigens auch möglich, einer negativen Gruppenlaufzeit einen physikalischen Sinn, unabhängig von der Form des Sendesignals, zu geben, wie hier nicht näher ausgeführt sei, sowie auch

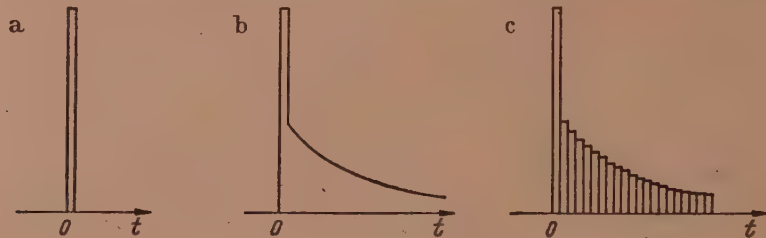


Abb. 10. Zum Begriff des Laufzeitspektrums.

die Gruppenlaufzeit allgemein in einen reversiblen und in einen irreversiblen Teil zu zerlegen, wobei letzterer nie negativ ist und bloß von den positiven Nullstellen der Frequenzcharakteristik bestimmt ist.¹¹

Schließlich besteht ein Zusammenhang zwischen den positiven Nullstellen der Frequenzcharakteristik und dem von F. Strecker eingeführten „Laufzeitspektrum“.¹² Wenn wir als Sendesignal einen Einheitsimpuls wählen, einen unendlich schmalen Kurvenzug mit der Fläche 1 (Abb. 10a), dann stellt das Empfangssignal (Abb. 10b) das Laufzeitspektrum $A(t)$ vor, das man sich, wie in Abb. 10c, aus lauter Einzelimpulsen von bestimmter Größe zusammengesetzt denken kann, die gegenüber dem Sendesignal eine zeitliche Verzögerung erfahren haben. Für $t < 0$ ist das Laufzeitspektrum stets Null und für $t > 0$ setzt es sich — wegen $x_e(t) = 0$ — aus Eigenschwingungen des Übertragungssystems zusammen. Da nun für jeden praktisch vorkommenden zeitlichen Verlauf des Sendesignals $x_e(t)$ der Faltungssatz gilt,¹³

$$x_a(t) = -\infty \int^{+\infty} x_e(\tau) \cdot A(t - \tau) \cdot d\tau = -\infty \int^{+\infty} x_e(t - \tau) \cdot A(\tau) \cdot d\tau,$$

kann man sich das Empfangssignal $x_a(t)$ immer aus lauter dem Sendesignal ähnlichen Einzelsvorgängen zusammengesetzt denken, die gegenüber dem Sendesignal eine dem Laufzeitspektrum entsprechende Größe und Verspätung haben.

Aus dem Laufzeitspektrum als solchem ist nicht unmittelbar zu erkennen, ob die Frequenzcharakteristik gerichtet oder ungerichtet ist. Es kann jedoch umgekehrt die Frage aufgeworfen werden: Wie muß das Sendesignal $B(t)$ aussehen, damit das

¹¹ Die Ausführung dieser Untersuchung geschieht nach dem Wiedererscheinen der Elektrischen Nachrichten-Technik bei Veröffentlichung der vollständigen Dissertation. Vgl. Fußnote 1.

¹² F. Strecker: Beeinflussung der Kurvenform durch Dämpfungs- und Phasenverzerrung. Elektr. Nachr.-Techn. 17, H. 5, 91 (1940).

¹³ G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin: Springer-Verlag. 1937.

Empfangssignal ein Einheitsimpuls ist? Kennt man dieses Sendesignal, so kann man durch Faltung bei jedem praktisch vorkommenden beobachteten Empfangssignal das zugehörige Sendesignal ermitteln:

$$x_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(\tau) \cdot B(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_a(t - \tau) \cdot B(\tau) \cdot d\tau.$$

Man kann sich also auch hier beim Rückschluß vom Empfangs- auf das Sendesignal letzteres aus lauter dem Empfangssignal ähnlichen Einzelvorgängen zusammengesetzt denken, die eine der Funktion $B(t)$ entsprechende Größe und zeitliche Verschiebung haben. Die Funktion $B(t)$ sei „Laufzeitumkehrspektrum“ genannt.

Unter allen möglichen Funktionen $B(t)$, die die obige Bedingung erfüllen, sind nur solche sinnvoll, die bei $t \rightarrow -\infty$ und $t \rightarrow +\infty$ beschränkt sind. Die Unter-

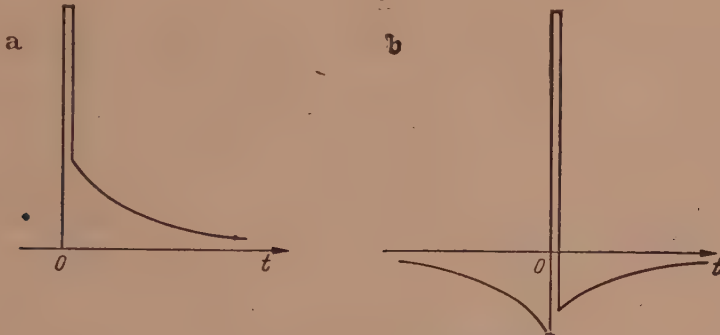


Abb. 11. Laufzeitumkehrspektren.

suchung dieses Problems¹⁴ liefert folgendes Ergebnis: Das Laufzeitumkehrspektrum besteht in der Umgebung des Zeitnullpunktes aus Impulsen bis zu n -ter Ordnung,^{15, 16} wenn n die Ordnung der Nullstelle der Frequenzcharakteristik im unendlich fernen Punkt ist. Liegen alle Nullstellen der Frequenzcharakteristik in der offenen linken λ -Halbebene, ist also die Frequenzcharakteristik ungerichtet, so ist das Laufzeitumkehrspektrum identisch Null für $t < 0$, sieht also so aus wie ein normales Laufzeitspektrum (Abb. 11a). Liegen jedoch Nullstellen in der rechten λ -Halbebene, so ist das Laufzeitumkehrspektrum für $t < 0$ von Null verschieden (Abb. 11b).

Im Abschnitt III wurde abgeleitet, wann aus dem Empfangssignal mit beliebiger Genauigkeit auf das Sendesignal zurückgeschlossen werden kann; das Laufzeitumkehrspektrum $B(t)$ zeigt anschaulich, wie dies erfolgt. Um aus dem beobachteten Empfangssignal das Sendesignal im Zeitpunkt t_0 zu ermitteln, betrachten wir die Gleichung

$$x_e(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} B(t_0 - t) \cdot x_a(t) \cdot dt.$$

Die beobachteten Momentanwerte des Empfangssignals liefern die Bausteine, aus denen das Sendesignal zusammenzusetzen ist. Jeder Momentanwert des Empfangssignals $x_a(t)$ trägt den Baustein $B(t_0 - t) \cdot x_a(t) \cdot dt$ dazu bei. Man sieht in Übereinstimmung zu Abschnitt III, daß bei ungerichteten Frequenzcharakteristiken, wo das Laufzeitumkehrspektrum für $t < 0$ verschwindet, die Beobachtung des Empfangs-

¹⁴ Vgl. Fußnote 1.

¹⁵ G. A. Campbell and R. H. Foster: Fourier Integrals for Practical Applications. Bell telephone syst. techn. publ., Math.-phys. Monogr. B 584.

¹⁶ K. W. Wagner: Operatorenrechnung. Leipzig: Joh. A. Barth. 1940.

signals zur Zeit $t \leq t_0$ vollständig hinreicht. Ist jedoch das Laufzeitumkehrspektrum für negative Argumente von Null verschieden, so muß das Empfangssignal auch noch zur Zeit $t > t_0$ beobachtet werden, um auf das Sendesignal eindeutig zurück-schließen zu können.

(Eingegangen am 19. Dezember 1946.)

Betrachtungen zur Mohrschen Theorie der Bruchgefahr.

Von Dr. Ing. Hermann Kastner.

Mit 6 Textabbildungen.

Die festen Körper setzen jeder Formänderung, die auf eine Trennung des Gefüges abzielt, einen beträchtlichen Widerstand entgegen; ihre Elementarteilchen werden daher von starken Kräften zusammengehalten. Andererseits ist aber auch eine große Kraftaufwendung notwendig, um eine Verdichtung des Gefüges herbeizuführen, weshalb Wirkungen vorhanden sein müssen, die die Annäherung der Körperelemente zu verhindern suchen. In beiden Fällen sind die Kräfte so groß, daß sie nur durch Wechselwirkungen von elektrischen Elementarladungen erklärt werden können, während Massenanziehungskräfte, wenigstens unter irdischen Verhältnissen, ganz unzureichend sind und nicht in Betracht kommen.

1. Über das Wesen der Festigkeitseigenschaften der festen Stoffe.

Die festen Körper treten vorwiegend in kristalliner Form auf, und es liegt daher nahe, die Anschauungen über die den Aufbau der Kristalle bestimmenden molekularen Kräfte¹ auf Festigkeitsbetrachtungen zu übertragen.

Wenn man von den van der Waalsschen Bindungskräften der Molekülgitter absieht, so sind es immer die Elektronen der äußersten Hülle, die, wenn auch in verschiedener Art, die Anziehungskräfte zwischen den Gitterelementen bedingen. Bei den Ionenkoordinationsgittern bilden die durch den Übergang der Elektronen der äußersten Hülle aus den Atomen entstandenen Ionen mit entgegengesetzter Ladung die Elemente der heteropolaren Bindung; die homöopolare Bindung wird in der Regel durch Paare von Valenzelektronen bewirkt; liegt metallische Bindung vor, dann sind die Elektronen der äußersten Hülle frei beweglich und die Anziehungskräfte zwischen dem „Elektronengas“ und den gleichsinnig positiv geladenen Metallionen bewirken den Strukturverband.

Die Abstoßungskräfte dürften bei der heteropolaren Bindung durch die abschirmende Wirkung der Elektronenhüllen hervorgerufen werden, während sie bei den zwei anderen Bindungsarten auf die Abstoßung der gleichsinnig elektrisch geladenen Atomrümpfe zurückzuführen sind.

In der technischen Festigkeitslehre kommen hauptsächlich die heteropolare und die metallische Bindung in Betracht.

Für die aus der Anziehung und Abstoßung zweier Elementarteilchen sich ergebende Mittelkraft gilt die Beziehung²

$$P = \frac{e_1 e_2}{r^2} - \frac{b}{r^n}. \quad (1)$$

Hierin bedeuten e_1 und e_2 die Größen der aufeinander wirkenden elektrischen Ladungen, r den Abstand der Elemente und b und n Festwerte, von denen der letztere unabhängig

¹ F. Machatschki: Grundlagen der allgemeinen Mineralogie und Kristallchemie, S. 128ff. Wien: Springer-Verlag. 1946.

² Grimsehl-Tomaschek: Lehrbuch der Physik, Bd. III: Materie und Äther.

von der Natur der Kristalle in der Nähe von 10 liegt. Das erste Glied des Ausdruckes (1) stellt das Coulombsche Anziehungsgesetz für entgegengesetzte elektrische Ladungen dar und das zweite Glied bringt die für die abstoßende Wirkung geltende Gesetzmäßigkeit zum Ausdruck.

Die durch die Beziehung (1) gegebene Gesetzmäßigkeit läßt sich bildlich darstellen wie folgt (Abb. 1).

In dem rechtwinkligen Koordinatennetz werden als Abszissen die Abstände r der Elementarteilchen und als Ordinaten die zwischen ihnen zur Erzielung des Gleichgewichtes notwendige Kraft P sowie die beiden Komponenten, aus denen sie sich zusammensetzt, aufgetragen.

Im Punkt R sind Anziehung und Abstoßung einander gleich; er entspricht jenem Zustand, bei dem keine äußere Einwirkung vorhanden ist. Hierbei stellt die Strecke RR' die Größe der Abstoßung und die Strecke RR'' die gleichgroße anziehende Kraft dar.

Wirkt zwischen den Elementarteilchen die Kraft P , so wird die Anziehung auf jenen Wert vermindert, dem in der Abb. 1 die Strecke QQ'' entspricht. Bei einer Entfernung r , die durch die Abszisse OQ gekennzeichnet ist, besteht also Stabilität nur dann, wenn die Elementarteilchen unter dem Einfluß einer Kraft P stehen, die im beispielsweise angenommenen Falle eine Zugwirkung ist und die durch eine Spannung im Sinne der Festigkeitslehre hervorgerufen sein möge.

Für Kräfte P , die einen Größtwert P_{\max} übersteigen, ist ein Zusammenhang der Teilchen nicht mehr möglich (Zerreißen des Körpers unter einer Zugspannung oder Übergang in den flüssigen Aggregatzustand bei Erwärmung).

Der molekulare Innendruck in einem Kristall wird daher von der Coulombschen Anziehung der Elementarteilchen hervorgerufen. Die Summe aller anziehenden Kräfte wird in ihrer allseitigen Wirkung auch als Kohäsion bezeichnet.

Wenn auf Grund der Kräftewirkungen zwischen den Ionen oder Atomen die Kohäsion eines Kristalles berechnet wird, so ergeben sich Werte, die wesentlich höher liegen als die experimentell bestimmte Zerreißenfestigkeit. So läßt sich beispielsweise für Steinsalz ein molekularer Innendruck von rund 20000 kg/cm² errechnen, während die Zerreißenfestigkeit im Versuchswege nur mit etwa 50 kg/cm² ermittelt wird.³ Die Ursache dieser außerordentlich großen Unstimmigkeit liegt, wie Smekal⁴ gezeigt hat, zum Teil darin begründet, daß die theoretische Gitteranordnung nur in Bereichen von der Größenordnung 10⁵ bis 10⁶ Moleküle erfüllt zu sein scheint. Es bilden sich Gitterblöcke von diesen Ausmaßen, die gegeneinander verschoben und verdreht angeordnet sind und dazwischen liegen die sog. Lockerstellen. Sie entstehen unter dem Einfluß von geringfügigen Verunreinigungen, stören das Gefüge des Kristalles empfindlich und setzen seine Festigkeitseigenschaften sehr stark herab.

Andererseits muß aber darauf hingewiesen werden, daß die Kohäsion (der molekulare Innendruck) in dem früher definierten Sinn mit der Zerreißenfestigkeit eines festen Körpers nicht identisch ist und daß der für den spannungslosen Zustand geltende molekulare Innendruck durch Zugversuche nicht ermittelt werden kann.

Das Bild, das Smekal für den Einkristall entworfen hat, gilt in entsprechend vergrößertem Maßstab für kristalline Stoffe, weil die Verkittung der sie bildenden Einzelkristalle niemals von derselben Festigkeit sein kann wie das innere Gefüge der

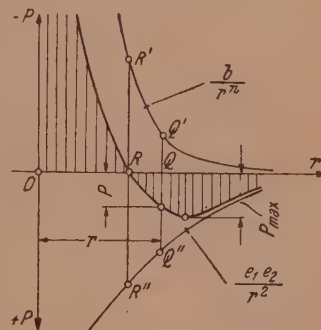


Abb. 1. Verlauf der Molekularwirkungen nach Grimsehl-Tomaschek, Lehrbuch der Physik.

³ Grimsehl-Tomaschek: A. a. O.

⁴ A. Smekal: Festigkeit und Molekularkräfte. Z. österr. Ing.- u. Architekten-Ver. 217 (1922).

Kristallkörner. Bei der Verkittung der Kristalle müssen aber die gleichen Elementarkräfte wirksam sein wie beim Aufbau des Kristallgitters selbst. Hierbei besteht keine Notwendigkeit, einen interkristallinen Zement anzunehmen,⁵ sondern es genügt, den die Einzelkristalle in ihren Berührungsflächen zusammenhaltenden Kräften die gleiche Natur zuzuerkennen wie im Innern der Kristallkörner, nur werden die Kräfte an der Oberfläche der Einzelkristalle an Intensität hinter den Gitterkräften stark zurückbleiben, weil die Festigkeitsbedingungen viel ungünstiger liegen. Insbesondere ist eine starke Abnahme der Kohäsion bei Körpern zu erwarten, die von Grob- und Feinporen durchsetzt sind, wie etwa der Zementstein des Betons.

2. Übergang von den Molekularkräften zu den Spannungen im Sinne der Festigkeitslehre.

Wenn man von der Betrachtungsweise der Atomphysik zu jener der Festigkeitslehre übergeht, so muß zunächst festgestellt werden, daß sich an der Natur der wirksamen Kräfte nichts ändern kann. Die Festigkeitseigenschaften eines Körpers müssen also ausnahmslos auf elektrische Elementarkräfte zurückzuführen sein, weil andere Wirkungen zwischen den Elementarteilchen von ausreichender Größe nicht bestehen.

Betrachtet man Flächenelemente, wie sie die Festigkeitslehre begrenzt, in denen nämlich noch eine sehr große Anzahl von Elementarteilchen auf beiden Seiten einander gegenüberstehen, so wird sich hinsichtlich der Kraftwirkungen ein außerordentlich verwickeltes Bild ergeben. Man muß im Sinne der Smekalschen Deutung annehmen, daß nur ein geringer Bruchteil der vorhandenen Elementarteilchen zur gegenseitigen Wirkung kommt; in den Porenräumen werden überhaupt keine Gefügekkräfte vorhanden sein. Außerdem werden die Wirkungslinien der Kräfte alle möglichen Richtungen aufweisen. Die Flächenelemente sollen aber so groß sein, daß der statistische Mittelwert der Wirkungen an jeder Stelle des kristallinen Körpers der gleiche ist und an jedem seiner Punkte für alle möglichen Richtungen unverändert bleibt. Damit sind Homogenität und Isotropie des Körpers hinsichtlich der Festigkeitseigenschaften als gegeben vorausgesetzt.

Um die Beziehung (1) für die Zwecke der Festigkeitslehre brauchbar zu machen, sind an ihr einige formale Änderungen durchzuführen (s. hierzu Abb. 2). An Stelle der Elementarkraft P hat die Normalspannung σ zu treten. Der Ursprung des Koordinatennetzes wird zweckmäßig nach dem Punkt R der Abb. 1 verschoben, weil für ihn der spannungslose Zustand gilt. An Stelle des Abstandes r tritt dann die Größe $1 + \varepsilon$, wobei die Dehnung ε für Zugwirkungen positiv und bei Zusammenrückung negativ zu nehmen ist. Bei dieser Umwandlung sind überdies die Werte für die elektrischen Elementarladungen e_1 und e_2 zu beseitigen und durch eine Materialkonstante, die mit α bezeichnet werden soll, zu ersetzen; auch der Wert b erfährt eine Änderung, die durch Einführung der Bezeichnungsweise β gekennzeichnet werden möge, womit schließlich die Beziehung

$$\sigma = \frac{\alpha}{(1 + \varepsilon)^2} - \frac{\beta}{(1 + \varepsilon)^n} \quad (2)$$

gewonnen wird. Der mit ihr festgehaltene Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung gilt für eine Formänderung bei verhinderter Seitendehnung, weil hierbei die Anzahl der in einem Flächenelement einander gegenüberliegenden und zur gegenseitigen Wirkung kommenden Elementarteilchen ungeändert bleibt. Aus der Be-

⁵ S. hierüber Terzaghi: Erdbaumechanik, S. 107.

ziehung zwischen Spannung und Dehnung läßt sich der Elastizitätsmodul bei verhinderter Seitendehnung herleiten; er ergibt sich zu

$$E_v = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = -\frac{2\alpha}{(1+\varepsilon)^3} + \frac{n\beta}{(1+\varepsilon)^{n+1}}.$$

Für $\varepsilon = 0$ und $\sigma = 0$ folgt aus der Gl. (2)

$$\alpha = \beta = k_{v0},$$

wobei k_{v0} die Kohäsion im normalspannungslosen Zustand bedeutet. Mit diesem Ergebnis lautet die Gleichung für die Spannungs-Dehnungs-Linie (Kurve C_v in Abb. 2):

$$\sigma = k_{v0} \left[\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \right]. \quad (4)$$

Für die Kohäsion, die bei einer Dehnung ε herrscht, gilt dann der für die späteren Betrachtungen grundlegend wichtige Ausdruck

$$k_v = \frac{k_{v0}}{(1+\varepsilon)^2}. \quad (5)$$

Ist eine Querdehnung möglich, dann ist der Wert k_v entsprechend der dadurch hervorgerufenen Querschnittsänderung zu berichtigen. Aus der Gl. (4) läßt sich dann durch Reihenentwicklung in erster Annäherung das Hookesche Gesetz ableiten, und wenn eine genauere Anpassung erwünscht ist, können Potenzgesetze beliebigen Grades daraus ermittelt werden.

Der Elastizitätsmodul bei verhinderter Seitendehnung E_{v0} beträgt für $\varepsilon = 0$

$$E_{v0} = k_{v0} (n - 2).$$

Weil aber n , wie erwähnt, für kristalline Körper wenig veränderlich ist, muß das Verhältnis

$$\frac{E_{v0}}{k_{v0}} = n - 2 \quad (6)$$

gleichfalls nahezu konstant sein, wobei sich sein Wert auf etwa 8.0 stellen wird. Diese interessante Tatsache ist von Terzaghi⁶ mitgeteilt worden; sie hat hiermit eine theoretische Begründung gefunden. Um die Verhältnisse zu beleuchten, sollen die von Terzaghi beispielsweise angeführten Werte für verschiedene Metalle in der nachstehenden Tab. 1 wiedergegeben werden.

Tab. 1.

Stoff	Elastizitätsmodul bei verhinderter Seiten- dehnung E_{v0} kg/cm ²	Molekularer Innen- druck k_{v0} kg/cm ²	$E_{v0}:k_{v0}$	Anmerkung
Blei	576 000	50 831	11.30	rein, gegossen
Zinn	815 000	72 150	11.30	„ „
Silber	1 470 000	159 795	9.20	„ „ bearbeitet
Kupfer	1 870 000	233 031	8.00	„ „
Eisen	2 730 000	319 689	8.53	mit 0.1% C, bearbeitet
Nickel	2 780 000	320 380	8.68	97% Ni, 1.4% C, 1% Mn, bearbeitet

Das Verhältnis zwischen dem Elastizitätsmodul bei verhinderter Seitendehnung und dem molekularen Innendruck schwankt bei den angeführten Beispielen innerhalb enger Grenzen, obwohl es sich um Metalle ganz verschiedener Raumgitterstruktur handelt.

⁶ A. a. O. S. 109.

b) Die Kohäsion in einem Flächenelement ist von der Dehnung senkrecht zu diesem Flächenelement abhängig. Sie wächst von einem Nullwert k_0 ausgehend mit zunehmender Zusammendrückung an und nimmt mit wachsender positiver Dehnung ab.

4. Betrachtungen zur Frage der Wirksamkeit der mittleren Hauptspannung.

Nach dieser etwas weitläufigen Vorbereitung möge auf den eigentlich zur Erörterung stehenden Gegenstand, die Mohrsche Theorie der Bruchgefahr, eingegangen werden.

Die Schwierigkeiten, die sich der experimentellen Bestimmung der Bruchlinie nach Mohr entgegenstellen, liegen hauptsächlich darin begründet, daß es nicht möglich ist, einen gewünschten Spannungszustand im Versuchswege vollkommen zu verwirklichen und daß es anderseits ebensowenig gelingt, einen durch den Versuch gegebenen Spannungszustand theoretisch einwandfrei zu erfassen. Dazu kommt noch der Umstand, daß die Voraussetzungen vollkommener Homogenität und Isotropie des Stoffes niemals erfüllt sind. Der einzige Spannungszustand, der sich in beabsichtigter Form brauchbar herbeiführen läßt, wenn er auch keine unmittelbare technische Bedeutung besitzt, ist der allseitige Druck. Er birgt beim fehlerfreien, homogenen Körper keine Bruchgefahr in sich. Dieses Ergebnis, das seit den Versuchen von A. Föppl⁷ als gesichert zu werten ist, läßt sich der Mohrschen Theorie zwanglos einfügen.

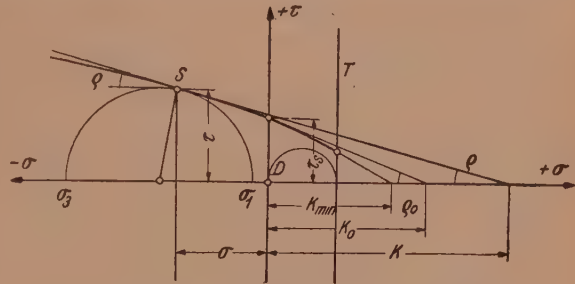


Abb. 3. Das Mohrsche Bild der Bruchgefahr.

Nicht so einfach ist die Frage zu beantworten, ob die Überlagerung eines beliebigen Spannungszustandes mit einem allseitigen Druck eine Änderung der Bruchgefahr herbeiführt. Voigt⁸ hat experimentell gezeigt, daß eine solche Beeinflussung bei gewissen spröden Stoffen im Widerspruch mit der Mohrschen Theorie scheinbar nicht besteht.

Die grundlegende Aussage der Mohrschen Bruchtheorie ist die Behauptung der Existenz einer stetigen Einhüllenden der größten Spannungskreise für alle möglichen Bruchzustände eines Körpers und bei der erweiterten Theorie auch für die Erreichung der Fließgrenze. Die sich daraus ergebende Schlußfolgerung, daß es hinsichtlich der Bruch- oder Fließgefahr auf die mittlere Hauptspannung nicht ankommt, wird seit jeher mit einer gewissen Skepsis betrachtet. Die nachfolgenden Erwägungen wollen dazu beitragen, den Einfluß der mittleren Hauptspannung nachzuweisen.

Die Koordinaten des Berührungspunktes der Einhüllenden mit einem größten Spannungskreis (σ_1 , σ_3) sind die Normalspannung σ und die Schubspannung τ , die in dem gefährdeten Flächenelement herrschen (Abb. 3). Die Zerstörung des Körpers soll im Sinne der Mohrschen Theorie durch einen Gleitbruch herbeigeführt werden. Er wird von der Schubspannung τ ausgelöst, die den unter den gegebenen Bedingungen herrschenden inneren Gleitwiderstand des festen Körpers eben erreicht. Mit Einführung des Winkels des inneren Gleitwiderstandes ρ erhält man die Beziehung

$$\operatorname{tg} \rho = - \frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\tau}{\sigma + k}; \quad (7)$$

⁷ S. hierüber A. und L. Föppl: Drang und Zwang, Bd. I, S. 41f. 1920.

⁸ A. und L. Föppl: A. a. O. S. 43.

sie beinhaltet die Differentialgleichung der Bruchlinie. Bei ihrer Aufstellung wurde die für die gerade Bruchlinie leicht nachzuweisende Bedingung, daß die Subtangente den Wert $\sigma + k$ besitzt, auf das Linienelement der gekrümmten Bruchlinie übertragen. Die Summe $\sigma + k$ stellt hierbei den unter Berücksichtigung des molekularen Innendruckes in einem Flächenelement bei der Spannung σ jeweils herrschenden Gesamtdruck dar, von dem der innere Gleitwiderstand folgerichtig abhängig gemacht wurde. Einer Spannung σ gemäß Abb. 3 entsprechen aber je nach der Größe der Lateralspannungen verschiedene Dehnungen. Daher kann auch die Kohäsion senkrecht zu dem gefährdeten Flächenelement verschiedene, vom Spannungszustand abhängige Werte besitzen; es ist demnach anzunehmen, daß auch verschiedene Schubspannungen zum Gleitbruch führen werden und daß der Spannung σ kein eindeutig bestimmter Wert von $\tan \varrho$ zugeordnet ist. Dieser Umstand legt die Vermutung nahe, daß eine Einhüllende im Mohrschen Bild der Bruchgefahr als strenge Grenze nicht existiert, sondern daß an Stelle einer scharfen Begrenzung ein wenn auch nur schmaler Bruchbereich vorhanden ist, womit auch die Gl. (7) im allgemeinen ihre strenge Gültigkeit verliert und sie nur bei konstantem k behält.

Ähnliche Erwägungen führen zu dem Ergebnis, daß die Voraussetzung der Wirkungslosigkeit der mittleren Hauptspannung nicht zutreffend sein kann, weil für die Dehnung senkrecht zu einem Flächenelement und damit für die Kohäsion alle drei Hauptspannungen und nicht bloß deren zwei bestimmend sind. Allerdings wird die Wirkung der mittleren Hauptspannung dadurch begrenzt, daß sie zwischen die beiden Extremwerte eingengt ist.

Die vollständige Gleichwertigkeit aller drei Hauptspannungen kommt in den neueren quadratischen Fließbedingungen zum Ausdruck, deren allgemeine Form von Lode⁹ aufgestellt wurde und die wie folgt lautet:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (8)$$

Alle im Gebrauch stehenden quadratischen Fließbedingungen lassen sich dieser Form einordnen. Keine der Hauptspannungen nimmt hierbei eine bevorzugte Stellung ein.

Wenn man aber die dargelegten theoretischen Erwägungen hinsichtlich der Wirksamkeit der mittleren Hauptspannung in Zweifel zieht, so bleiben die Versuchsergebnisse bestehen, an denen man nicht vorbeigehen kann. Den besten Aufschluß liefern, abgesehen von der experimentellen Bestätigung der Fließbedingungen von der allgemeinen Form gemäß Gl. (8), die Versuche an Probekörpern aus Marmor von Kármán und Böker, die von Rendulic¹⁰ verarbeitet wurden, und die Versuche von Roš und Eichinger aus dem Bericht Nr. 28 der Eidgenössischen Materialprüfanstalt Zürich, 1928. Die Zahlenwerte für die letzteren Versuche, die in der Abb. 4 zur Darstellung gelangen, wurden aus dem Werk „Ingenieurgeologie“ von Bendel¹¹ entnommen, weil die Originalberichte nicht zur Verfügung stehen. Für die dort als „Druckversuche“ bezeichnete Reihe, bei der einem allseitigen Druck p_a ein einachsiger Druckspannungszustand überlagert wird, ist die mittlere Hauptspannung σ_2 gleich der größten Hauptspannung σ_1 und das Spannungsschema lautet $(\sigma_1 = \sigma_2 = p_a, \sigma_3)$. Hingegen sind die sog. „Zugversuche“ durch das Schema $(\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = p_a)$ charakterisiert; die mittlere Hauptspannung ist in diesem Falle gleich der kleinsten Hauptspannung. Die beiden Versuchsgruppen ergeben voneinander abweichende Bruchlinien (Abb. 4a) und zeigen deutlich den Einfluß der mittleren Hauptspannung.

⁹ S. hierüber: L. Rendulic: Eine Betrachtung zur Frage der plastischen Grenzzustände. Bau-Ing. H. 11/12, 159 (1928).

¹⁰ A. a. O. S. 163.

¹¹ L. Bendel: Ingenieurgeologie, I. Teil, S. 548. Springer-Verlag. 1944.

Wird der Sonderfall der einachsigen Druckbeanspruchung in Betracht gezogen, so gilt das Spannungsschema ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3$); der entsprechende größte Spannungskreis wurde in der Abb. 4b mit K bezeichnet. Der vergleichbare sog. „Zugversuch“ ist durch den Spannungszustand ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3$) gekennzeichnet; er stellt also eigentlich einen zweiachsigen Druckversuch dar, dem in der Abb. 4b der Spannungskreis K_1 entspricht. Der einachsige Druckspannungszustand birgt also eine größere Bruchgefahr in sich als der zweiachsige. Es wird späterhin Gelegenheit sein zu zeigen, daß sich dieses Ergebnis folgerichtig den angestellten Erwägungen einfügt.

Rendulic¹² kommt, ohne auf das physikalische Wesen der Festigkeitseigenschaften einzugehen, zu dem Ergebnis, daß in den quadratischen Fließbedingungen der veränderliche Anteil der Gestaltsänderungsarbeit wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = f [(\sigma_1 + p) + (\sigma_2 + p) + (\sigma_3 + p)]. \quad (9)$$

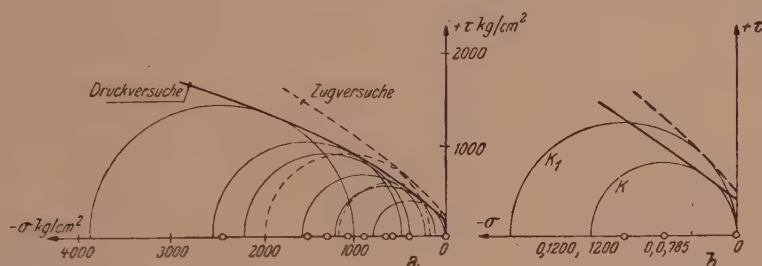


Abb. 4. Hülllinien für Marmor auf Grund der Versuche der Eidgenössischen Materialprüfanstalt Zürich 1928, aus Bendel, Ingenieurgeologie.

In dieser Beziehung sind die Hauptspannungen um die mit p bezeichnete Kohäsion vermehrt, die sich ohne Zwang in die Fließbedingungen einfügen läßt.

5. Begründung für eine gesonderte Behandlung von Trenn- und Gleitbruch.

Aus den bisherigen Darlegungen folgt, daß das Bestreben, der Bruchlinie in mathematischer Form Ausdruck zu geben, entweder auf einen speziellen Spannungszustand beschränkt bleiben muß, wie etwa ($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3$) oder ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$) usw. oder aber, wenn Allgemeingültigkeit angestrebt wird, nur zu einer Näherungslösung führen kann.

Ein weiteres Ergebnis der angestellten Betrachtungen ist, daß der Zugversuch ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) und der Druckversuch ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3$) nicht zur gleichen Bruchlinie führen, weil im ersten Falle die mittlere Hauptspannung gleich der kleinsten Extremspannung σ_3 und im zweiten Fall gleich der größten σ_1 ist. Der Spannungskreis für die reine Schubspannung (Drillversuch) gehört einer mittleren Lage der Bruchlinie an.

Diese Feststellungen gelten mit der Einschränkung, daß kein Trennbruch eintritt. Außer der Tatsache, daß die physikalischen Vorgänge beim Trennbruch von jenen verschieden sind, die beim Gleitbruch eintreten, gibt es weitere Gründe, die dafür sprechen, in die Bruchlinie nach Mohr den Trennbruch nicht mit einzubeziehen; sie mögen nachstehend kurz angeführt werden.

Wie aus der Abb. 2 hervorgeht, ist im Augenblick des Bruches bzw. unmittelbar vor seinem Eintritt eine Kohäsion vorhanden, die die einachsige Zugfestigkeit σ_{\max} noch etwas übersteigt. Die Bruchlinie kann daher die Spannungsachse nicht schneiden, sondern wird über ihr endigen, weil die Tangente an die Bruchlinie auf der Spannungs-

¹² A. a. O. S. 162.

achse eine Kohäsion abschneiden soll, die größer ist als σ_{\max} . Andererseits soll der Hauptspannungskreis für den Trennbruch beim einachsigen Zugversuch die Bruchlinie in ihrem Schnittpunkt mit der Spannungsachse berühren, d. h. die Bruchlinie soll in der Spannungsachse ihren Scheitel besitzen. Es ist unmöglich, diese Bedingungen in Einklang zu bringen. Außerdem ist die Annahme, daß die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes im Augenblick oder unmittelbar vor Eintritt des Trennbruches unendlich groß wird, nicht zu rechtfertigen; sie wird einen endlichen Wert behalten, woraus folgt, daß die Bruchlinie die Spannungsachse nicht unter einem rechten Winkel schneiden kann.

Um diesen Schwierigkeiten zu begegnen, ist es zweckmäßig, den Trennbruch und den Gleitbruch gesondert zu behandeln, eine zur τ -Achse parallele Gerade T als Bruchlinie für den einachsigen Trennbruch einzuführen und analog eine Bruchlinie T_a beispielsweise für die allseitige Zugbeanspruchung anzunehmen, die etwas nach der positiven Seite der Spannungsachse hin verschoben ist (Abb. 3 und 5). Hierbei ist eigentlich nur der jeweilige Schnittpunkt der Trennbruchlinie mit der Spannungsachse für den Trennbruch maßgebend. Durch Einführung der Trennbruchlinien parallel zur τ -Achse wird aber gleichzeitig eine Abgrenzung der Gleitbruchlinie auf der Seite der Zugspannungen herbeigeführt.

6. Beurteilung des Mohrschen Bruchbildes bei Verwendung einer Hüllgeraden.

Im Falle des Gleitbruches hat die Dehnung senkrecht zur Bruchfläche (Gleitfläche) nur mittelbare Bedeutung, insofern als durch sie die Kohäsion bestimmt wird und diese für die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes und damit für die Neigung der Gleitbruchlinie gegen die Spannungsachse maßgebend ist.

Die bisherigen Erwägungen haben ergeben, daß es im Sinne der Mohrschen Theorie nur einen streifenförmigen Bruchbereich, aber keine Gleitbruchlinie geben kann, wobei augenscheinlich nur der Einfluß der mittleren Hauptspannung Berücksichtigung verdient, weshalb er allein weiterhin in Betracht gezogen wird. Eine in vielen Fällen brauchbare Näherungslösung liegt dann vor, wenn Mohr den Verlauf der Gleitbruchlinie in einem begrenzten Spannungsbereich geradlinig annimmt. Diese Näherungslösung hat den Vorteil, daß sie theoretisch einwandfrei ist, weil ihr die Annahme zugrunde liegt, daß die Kohäsion den konstanten Wert k_0 besitzt. Die Gl. (7) hat dann strenge Gültigkeit.

Die gerade Gleitbruchlinie versagt bei sehr großen dreiachsigen Druckbeanspruchungen, weil dann die Kohäsion einem unendlich großen Wert zustrebt. Nach den Anschauungen Kármáns besitzt die Gleitbruchlinie auf der Druckseite eine waagrechte Asymptote.

Desgleichen sind Abweichungen auf der Zugseite zu erwarten, denen aber durch die früher eingeführten Trennbruchlinien Rechnung getragen wurde. Das aus ihnen und den geraden Gleitbruchlinien zusammengesetzte vereinfachte Schema wird in vielen Fällen eine brauchbare Beurteilung der Bruchgefahr gestatten; dies um so mehr, als die Grenzen seiner Anwendbarkeit aus den bisherigen Darlegungen erkennbar sind. Die Elemente dieses Schemas sind die Scherfestigkeit τ_{s0} , die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes $\operatorname{tg} \varrho_0$ und die Zugfestigkeiten. An Stelle einer der beiden ersteren Größen kann auch der konstant angenommene molekulare Innendruck k_0 treten.

Bei spröden Stoffen (Beton) ergibt sich damit das nachstehende Bild (Abb. 5). Der Spannungskreis für den einachsigen Zugversuch berührt die Gerade T . Für einen mehrachsigen Zugspannungszustand gilt eine nach der positiven Spannungsseite hin verschobene Trennbruchlinie. Nach den vorliegenden Versuchsergebnissen dürfte diese Verschiebung nur ein sehr geringes Maß besitzen (hoher Wert der

Poisson-Zahl). Treten laterale Druckspannungen hinzu, dann verschiebt sich die Trennbruchlinie gegen den Ursprung des Spannungsnetzes hin.

Die reine Schubfestigkeit (Hauptzugfestigkeit) τ_0 ergibt sich wahrscheinlich etwas kleiner als die einachsige Zugfestigkeit; der Spannungskreis für den Schubspannungszustand berührt die Bruchlinie T_s .¹³

Unabhängig von der reinen Schubfestigkeit (Hauptzugfestigkeit) τ_0 besteht eine Scherfestigkeit τ_{s0} , die bei Beton wesentlich größer ist wie die erstere. Wie die obige Darstellung (Abb. 5) zeigt, besteht aber zwischen diesen beiden Festigkeitswerten kein unmittelbarer Zusammenhang.

In der Abb. 5 ist außerdem der ideale Spannungskreis für den einachsigen Druckversuch eingezeichnet. Er berührt die Gleitbruchlinie im Punkt B , durch den der Winkel $90^\circ - \vartheta$ festgelegt ist, den die Gleitfläche mit der Druckrichtung einschließt. Der spitze Winkel zwischen Gleitfläche und Druckrichtung hat zur Vermutung geführt, daß der Bruch von Beton- u. Steinwürfeln durch Aufspaltung, wie er bei möglichster Ausschaltung der Reibung in den Druckflächen auftritt, als Gleitbruch mit steiler Aufrichtung der Gleitflächen erklärt werden kann.¹⁴ Dies trifft aber nicht zu, wie u. a. die Versuche und die theoretischen Erwägungen Gehlers¹⁵ bewiesen haben.

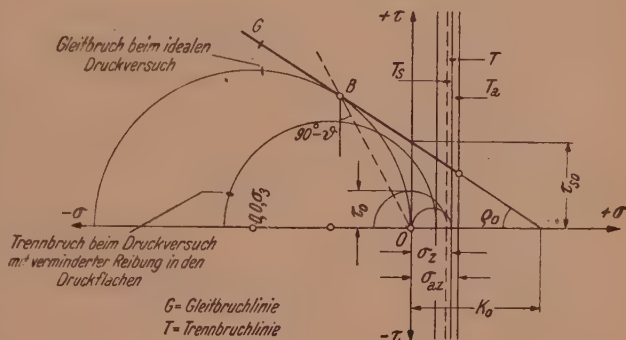


Abb. 5. Bruchlinienschema aus geradlinigen Ästen für einen spröden Körper.

Beim Druckversuch steht der Versuchskörper niemals in seiner ganzen Ausdehnung unter einem einachsigen Spannungszustand. Bei einem etwa zylindrisch angenommenen Probekörper wirkt der äußere Teil als Mantel, in dem radiale Druckspannungen und dementsprechend tangentielle Zugspannungen auftreten, weil anders eine Querdehnung überhaupt nicht erklärt werden kann.¹⁶ Die äußeren Schichten des Probekörpers spielen dabei eine ähnliche Rolle wie eine Umschnürung und sind dementsprechend beansprucht. Diese Erscheinung ist um so ausgeprägter, je mehr die Reibung in den Druckplatten ausgeschaltet ist und sie kann bei manchen spröden Körpern zum Trennbruch und zur Aufspaltung führen, bevor der Gleitwiderstand überwunden ist. Der größte Spannungskreis für den Druckversuch hat deshalb nahe der Oberfläche des zylindrischen Probekörpers als größte Hauptspannung σ_1 eine Zugspannung und die Brucherscheinung ist davon abhängig, ob dieser größte Spannungskreis die Gleitbruchlinie oder die Trennbruchlinie berührt. Hierbei ist überdies anzunehmen,

¹³ Wenn man vielfach die Angabe findet, daß für Beton die Schubfestigkeit etwas mehr als doppelt so groß ist wie die Zugfestigkeit, so möge dem gegenübergehalten werden, daß nach Versuchen von A. Föppl die wahre Zugfestigkeit viel größer ist als der mit den üblichen Probekörpern experimentell bestimmte Wert. Die immer vorhandene Ungleichmäßigkeit in der Spannungsverteilung hat eine geringere scheinbare Zugfestigkeit zur Folge.

¹⁴ C. Torre: Über den plastischen Körper von Prandtl. Zur Theorie der Mohrschen Grenzkurve. Österr. Ingenieur-Arch. I, H. 1/2, 45 (1946).

¹⁵ W. Gehler: Die Würfel- und Säulenfestigkeit und die Säulenfestigkeit als Grundlage der Betonprüfung und die Sicherheit von Beton- und Eisenbetonbauten. Bau-Ing. H. 2 (1928).

¹⁶ Die experimentell bestimmte Querdehnung ist also das Ergebnis eines ungleichmäßigen räumlichen und keineswegs eines gleichmäßigen linearen Spannungszustandes. Daraus folgt, daß man die so ermittelte Poissonsche Zahl nicht bedenkenlos zur Berechnung von reduzierten Spannungen heranziehen sollte.

daß beim Druckversuch die Zerreißfestigkeit senkrecht zur Druckrichtung herabgemindert wird, so daß die zugehörige Trennbruchlinie noch weiter gegen den Ursprung des Spannungsnetzes rückt als die Linie T_s (Abb. 5). Dies ist vielleicht auch eine Erklärung der mit der Mohrschen Theorie in Widerspruch stehenden Versuchsergebnisse von Voigt, die im Abschnitt 4 erwähnt wurden.

Für bildsame Stoffe (Stahl) ist der molekulare Innendruck, verglichen mit den Festigkeitswerten, außerordentlich groß (s. Tab. 1 im Abschnitt 2) und die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes dementsprechend niedrig, so daß mit guter Näherung die „Hauptschubspannungshypothese“ gilt. Die Schub- und Scherfestigkeit sind nahezu gleich groß. Hierbei ist zu bemerken, daß es beim bildsamen Körper eine Schubfestigkeit, bei der der Körper durch Überwindung des inneren Gleitwiderstandes zu Bruch geht, tatsächlich gibt, während bei spröden Stoffen infolge der Lage der Trennbruchlinien eigentlich keine Schubfestigkeit, sondern nur eine Hauptzugfestigkeit auftreten kann (Stahlbeton).

7. Bemerkungen zur Verwendung gekrümmter Bruchlinien.

Für die Gleitbruchlinie nach Mohr kann, sofern es die Versuchsergebnisse als notwendig erscheinen lassen, eine gekrümmte Form gewählt werden; hierbei sind

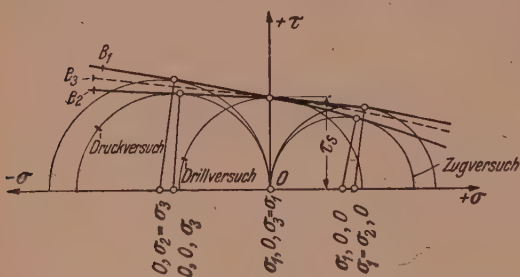


Abb. 6. Gekrümmte Bruchlinien für bildsame Körper.

die folgenden Gesichtspunkte zu beachten, die eine Zusammenfassung der angestellten Betrachtungen darstellen.

Der aus der Mitwirkung der mittleren Hauptspannung sich ergebende Gleitbruchbereich wird durch zwei Kurven begrenzt (Abb. 6). Die steilere Grenzbruchlinie B_1 entspricht den „Zugversuchen“ ($\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_3$), die flachere B_2 den „Druckversuchen“ ($\sigma_1 = \sigma_2, \sigma_3$). Die Neigung der Bruchlinien ist unter sonst gleichen Bedingungen von der Kohäsion abhängig.

Durch einfache Erwägungen läßt sich der Nachweis erbringen, daß die größere Neigung der Gleitbruchlinie B_1 im Vergleich zu B_2 mit einer aus der Dehnung senkrecht zur Gleitfläche folgenden kleineren Kohäsion erklärt werden kann.

Für einen mittleren Spannungszustand $\left(\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \sigma_3\right)$ gilt die in der Abb. 6 eingezeichnete strichlierte Gleitbruchlinie B_3 . Trägt man überdies den größten Spannungskreis für den reinen Schubspannungszustand ein, so erhält man eine Erklärung dafür, daß beispielsweise für Stahl die Fließgrenze beim Drillversuch etwas höher liegt als der halbe Mittelwert der Streck- und Quetschgrenze. Auf Grund der Versuche von Roß und Eichinger hat sich dieser Verhältniswert für Stahl mit 0.57 ergeben.¹⁷

Die beiden Grenzbruchlinien und damit auch alle übrigen Gleitbruchlinien schneiden sich anscheinend nahe der τ -Achse; daraus würde folgen, daß eine vom Spannungszustand nahezu unabhängige Scherfestigkeit besteht.

Die geometrische Form der Gleitbruchlinien wird sich derart ergeben, daß sie im Sinne der Auffassungen Kármáns auf der Druckseite der gleichen waagrechten Asymptote zustreben. Hinsichtlich des Verlaufes auf der Zugseite möge darauf hingewiesen werden, daß eine starke Zunahme der Krümmung gegen einen in der Zug-

¹⁷ S. hierüber: Taschenbuch für Bauingenieure, herausgegeben von F. Schleicher, S. 1537. Springer-Verlag, 1943.

spannungsachse liegenden Scheitel, wie bereits erwähnt wurde, unnatürlich wäre, weil es ganz unwahrscheinlich ist, daß die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes von einem verhältnismäßig niedrigen Wert, der für $\sigma = 0$ gilt, in einem ganz kurzen Bereich zu unendlicher Größe anwächst. Durch Einführung der zur Schubspannungsachse parallelen Trennbruchlinien wurde diese sonst bestehende Schwierigkeit beseitigt und damit für manche Stoffe auf die „Hauptnormalspannungshypothese“ zurückgegriffen. Es dürfte sich als zweckmäßig erweisen, diese Trennbruchlinien auch bei gekrümmter Form der Gleitbruchlinien beizubehalten, wobei die Zwickelbereiche in der Nähe der Schnittpunkte der Bruchlinientypen bedeutungslos bleiben.

Eine einfache, gekrümmte Gleitbruchlinie stellt eine Näherungslösung dar. Weil aber die Grenzkurven nicht sehr stark voneinander abweichen, wird sich eine mittlere Bruchlinie, etwa von der Form B_3 in Abb. 6, für nicht allzugroße Spannungen als brauchbar erweisen. Daß hierbei der Leonschen Hüllparabel besondere Bedeutung zukommt, bedarf keiner Betonung.

(Eingegangen am 2. Jänner 1947.)

Die kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik und bizirkularen Quartik aus der komplexen Ortskurvendarstellung.¹

Von G. Oberdorfer, Graz.

Mit 7 Textabbildungen.

Die in der Ortskurventheorie übliche Konstruktion der zirkularen Kubik und bizirkularen Quartik stößt in der zeichnerischen Darstellung auf gewisse Schwierigkeiten, die bei der kissoidalen Erzeugung fortfallen. Es wird ein Weg angegeben, um zu einer einfachen Ermittlung der kissoidalen Erzeugungselemente dieser beiden Kurven zu gelangen.

1. Einleitung.

Man hat bisher die zirkulare Kubik und die bizirkulare Quartik in der Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik aus ihren komplexen (Vektor-) Gleichungen

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} + p \mathfrak{B} + p^2 \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} + p \mathfrak{E}} \quad (1)$$

und
$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{A} + p \mathfrak{B} + p^2 \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} + p \mathfrak{E} + p^2} \quad (2)$$

gewöhnlich so ermittelt, daß man die angegebenen Divisionen durchgeführt hat und damit eine Darstellung aus der Zusammensetzung einfacherer Ortskurven, vorzugsweise aus Geraden und Kreisen, erhielt. Die ausgeführten Divisionen liefern

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + p \mathfrak{C} + \mathfrak{I} \mathfrak{R}_0 \quad (3)$$

und
$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{C} + \frac{1}{\mathfrak{B}}, \quad (4)$$

wobei für die Kubik

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}, \\ \mathfrak{R} &= \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{C} \mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}, \\ \mathfrak{I} &= \mathfrak{A} - \mathfrak{R} \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{R}_0 &= \frac{1}{\mathfrak{D} + p \mathfrak{E}} \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

¹ Erweiterte Niederschrift nach einem im Dezember 1946 im österreichischen Ingenieurverein in Innsbruck gehaltenen Vortrag.

und die Quartik

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D} + p \mathfrak{E} + p^2}{(\mathfrak{A} - \mathfrak{C} \mathfrak{D}) + p (\mathfrak{B} - \mathfrak{C} \mathfrak{E})} \quad (4a)$$

erhalten wird.

Man findet also die Kubik durch Aneinanderreihen gleichbezeichneter Vektoren der Geraden $\mathfrak{R} + p \mathfrak{S}$ und des Kreises $\mathfrak{I} \mathfrak{R}_0$, wie es die Abb. 1 zeigt. Die Quartik erhält man so, daß man zuerst die Kubik nach (4a) ermittelt, diese invertiert und schließlich nach (4) den Ursprung um $-\mathfrak{C}$ verschiebt. Die Konstruktion von Gerade und Kreis sowie der Vorgang der Inversion sei im folgenden als bekannt vorausgesetzt.²

Die geschilderte Konstruktion hat nun eine Reihe von Nachteilen. Zunächst ersieht man aus der Abb. 1, daß man zwar einzelne Punkte der Kubik bekommt,

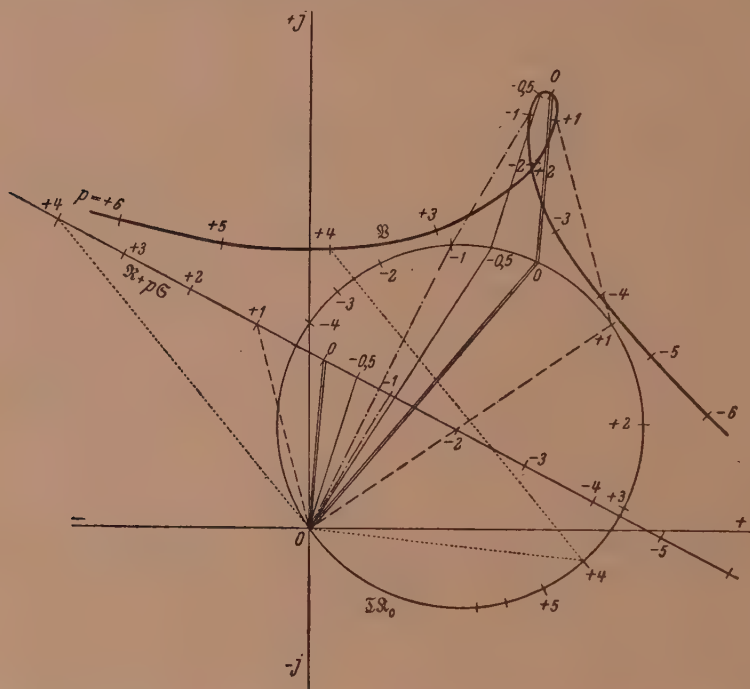


Abb. 1. Normalkonstruktion der zirkularen Kubik aus der Vektorgleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{R} + p \mathfrak{S} + \mathfrak{I} \mathfrak{R}_0$.

daß aber der Erhalt von Zwischenpunkten zur genauen Zeichnung der Kurve vergleichsweise umständlich ist. Man muß dazu nämlich zuerst gleichbezeichnete Punkte auf der Geraden und am Kreis ermitteln und aus diesen dann den Zwischenpunkt auf der Kubik bestimmen. Dabei ist es aber oft schwer, den Parameterwert des Zwischenpunktes so abzuschätzen, daß dieser tatsächlich in den gewünschten Zwischenbereich kommt. Will man beispielsweise in der Abb. 1 zwischen $p = 0$ und $p = -1$ einen Zwischenpunkt suchen, um die Rundung der Schleife der Kubik möglichst genau zeichnen zu können, so ist man in der Wahl des Zwischenparameters recht unsicher, da man ja den Zwischenpunkt gerne räumlich möglichst gerade in der Mitte zwischen $p = 0$ und $p = -1$ haben will. Wählt man $p = -0.5$, so sieht man nachträglich, daß der erhaltene Zwischenpunkt zu nahe an $p = 0$ liegt und etwa

² G. Oberdorfer: Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik. München: R. Oldenbourg. 1943.

die Wahl $p = -0.6$ besser gewesen wäre. In krasseren Fällen ist man so gezwungen, mehrere Zwischenpunkte zu wählen, was besonders unangenehm wird, wenn die Bezifferungen auf den erzeugenden Kurven nicht aus regulären, sondern irgendwelchen anderen Funktionsskalen hervorgehen.

Bei der bizirkularen Quartik wird dies noch unübersichtlicher, da man ja nach (4) vorerst die zugehörige Kubik ermitteln und diese dann invertieren muß. Überdies bildet die Inversion eine noch zusätzliche, unerfreuliche Mehrarbeit.

2. Definition der Kissoide.

Die angeführten Schwierigkeiten werden vermieden, wenn die Kurven kissoidal erzeugt werden. Unter der Kissoide \mathfrak{K} zweier Kurven \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 versteht man nach Abb. 2 jene Kurve, die dadurch entsteht, daß man jeweils auf demselben Strahl aus einem Projektionszentrum Z den Abstand der einen Kurve von Z von der zweiten Kurve aus aufträgt.

Man sieht nun unmittelbar, daß jeder beliebige Zwischenpunkt durch Ziehen eines Strahles aus Z erreicht werden kann und daß man vor allem diesen Strahl sofort so wählen kann, daß er einen Zwischenpunkt genau an der Stelle liefert, an der man ihn haben will. Allerdings wird an dieser Stelle dann im allgemeinen von vornherein keine Bezifferung angebbar sein, was aber für die Konstruktion der Kurve — nämlich die Ermittlung ihrer genauen Form — belanglos ist.

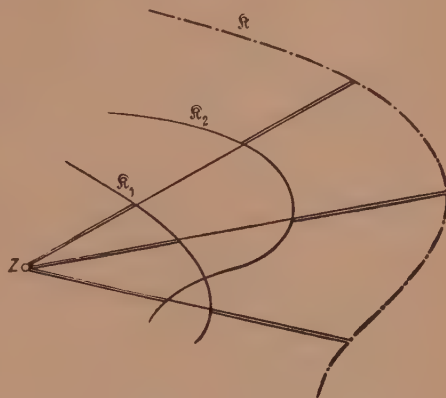


Abb. 2. Kissoide \mathfrak{K} zweier Kurven \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 .

Die kissoidale Konstruktion setzt voraus, daß nach dem Parameter p gleichbezeichnete Punkte der Erzeugerkurven je auf dem gleichen Strahl durch Z liegen. Es ist nun zwar allgemein bekannt, daß die Kissoide eines Kreises und einer Geraden eine zirkuläre Kubik, die zweier Kreise eine bizirkuläre Quartik ist; es war aber noch zu untersuchen, ob es gelingt, in beiden Fällen die in der komplexen Vektorform darzustellenden Erzeugerkurven aus der gegebenen Gleichung der Kubik oder Quartik so abzuleiten, daß gleichbezeichnete Punkte tatsächlich stets auf einer Erzeugenden durch Z liegen. So lieferte ja beispielsweise bereits die normale Entwicklung für die zirkuläre Kubik die Summe aus einem Kreis und einer Geraden. Diese beiden Teilgebilde sind aber nicht so gelagert, daß sie zu einer kissoidalen Erzeugung der Kubik führen, wie dies ja auch die Abb. 1 zeigt.

Eine für die kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik geeignete Umformung der Grundgleichung hat Nürnberg gezeigt,³ dessen Konstruktion im wesentlichen hier übernommen sei. Für die Umformung der Grundgleichung der bizirkularen Quartik liegt eine in Vergessenheit geratene, ältere Veröffentlichung vor, dessen Gedankengang im wesentlichen dem vierten Kapitel dieser Arbeit zugrunde gelegt wurde.⁴

3. Die kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik.

Wie schon erwähnt, ist die Kissoide aus einer Geraden und einem Kreis eine zirkuläre Kubik. Dabei liegt das Zentrum auf dem Kreis; es wird zum singulären Punkt der

³ W. Nürnberg: Die rationale Kubik und die rationale bizirkuläre Quartik als Ortskurven der Doppelkäfigmotore. Dissertation, Techn. Hochschule Berlin, 1943.

⁴ Infolge der kriegsbedingten Vernichtung meiner Aufzeichnungen war es mir noch nicht möglich, die angeführte Arbeit wieder ausfindig zu machen.

Kubik. Vom Zentrum aus gesehen liegen also Kreis und Gerade in perspektivischer Lage zueinander. Die zu lösende Frage ist also, ob es gelingt, die Lage der nach Gl. (3) erhaltenen Geraden und des Kreises so zu ändern, daß sie in das erforderliche perspektivische Verhältnis kommen. Nun können Kreis und Gerade beliebig verschoben werden, wenn gleichzeitig der Ursprung im Gegensinne verschoben wird. Offenbar

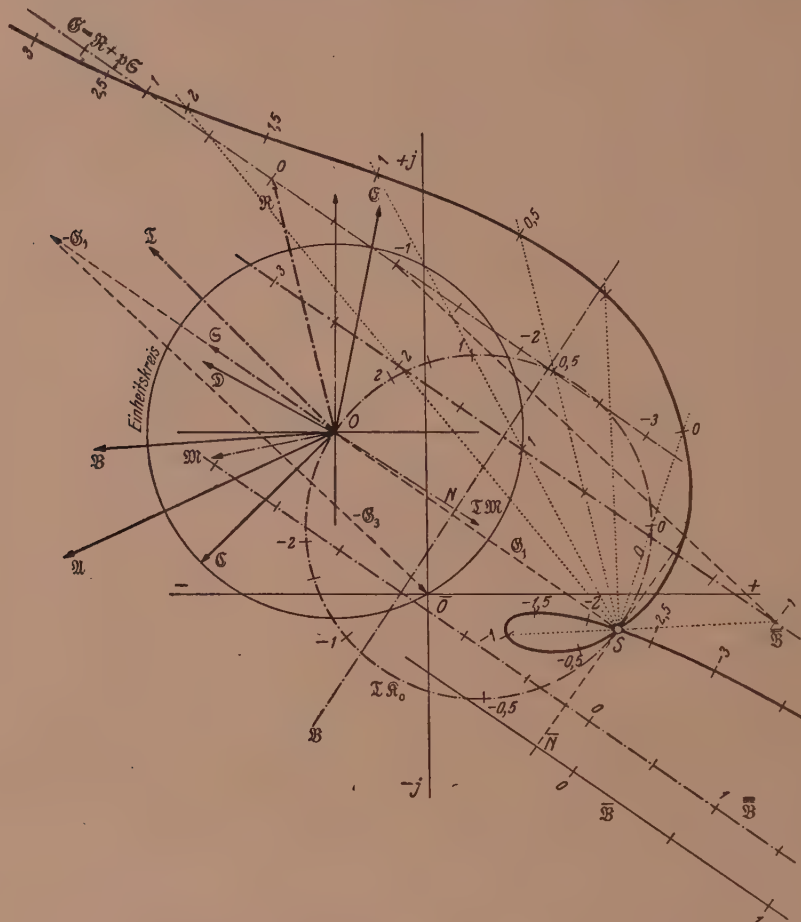


Abb. 3. Kissoidale Erzeugung der zirkularen Kubik.

liegt dann die Lösung in der Auffindung einer geeigneten Verschiebung der beiden erzeugenden Teilkurven.

Die Bezifferung des Kreises wird bekanntlich aus einer Bezifferungsgeraden abgeleitet, die das Spiegelbild der durch den Nenner der Kreisgleichung R_0 gegebenen Geraden bezüglich der reellen Achse ist und die vom Ursprung auf die Kreisperipherie projiziert wird. Damit wird aber das Verlagerungsproblem auf die Erreichung einer perspektiven Lage zwischen der Geraden $R + p S$ und der Bezifferungsgeraden des Kreises R_0 zurückgeführt. Da nun aber diese beiden Geraden gleiche Funktionskalen tragen, müssen sie in parallele Lage zueinander gebracht werden. Das ist nun ohne Schwierigkeit durchführbar und sei an Hand der Abb. 3 erläutert, in der auch die gesamte Konstruktion der Kubik durchgeführt wird.⁵

⁵ Die elementaren Konstruktionen von R , S , T und R_0 sind dabei der Übersichtlichkeit halber fortgelassen. Hierzu s. Fußnote 2.

Man ermittelt zuerst aus den Konstanten \mathfrak{N} bis \mathfrak{E} nach den Gl. (3a) die Strahlen \mathfrak{N} , \mathfrak{E} , \mathfrak{I} . Hierauf zeichnet man die Gerade $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} + p\mathfrak{E}$ und den Kreis $\mathfrak{I}\mathfrak{K}_0$ mit der Bezifferungsgeraden \mathfrak{B} . Diese ist nun so zu verdrehen, daß sie parallel zu \mathfrak{G} wird.

Die Bezifferungsstrahlen aus dem Ursprung bilden ein Strahlenbüschel zu den einzelnen Kreispunkten. Verschiebt man nun das Bezifferungszentrum längs des Kreisumfanges und nimmt man die Bezifferungsstrahlen mit, indem man sie an den Kreispunkten gleiten läßt, so schließen sie untereinander dieselben Winkel ein wie in der Ausgangslage, da diese Winkel Peripheriewinkel über gleichbleibende Bogen sind. Das Bezifferungsstrahlenbüschel bleibt also identisch erhalten und wird nur gegen die Ausgangslage verdreht, wobei natürlich auch die Bezifferungsgerade \mathfrak{B} selbst mitgenommen werden kann. Um also das neue Projektionszentrum S zu finden, hat man durch O eine Parallele zu \mathfrak{G} zu ziehen und mit dem Kreis $\mathfrak{I}\mathfrak{K}_0$ zum Schnitt zu bringen. Die neue Bezifferungsgerade $\overline{\mathfrak{B}}$ liegt nun im Abstand $S\overline{N} = ON$ parallel zu \mathfrak{G} . Nunmehr muß noch das projektive Verhältnis zwischen $\overline{\mathfrak{B}}$ und \mathfrak{G} bezüglich S hergestellt werden. Dazu diene folgende, an Hand der Abb. 4 gemachte Überlegung.

Um einen Punkt der Kubik zu finden, muß man nach der Normalkonstruktion die Strahlen aus O zu gleich bezeichneten Skalenpunkten von $\mathfrak{I}\mathfrak{K}_0$ und \mathfrak{G} addieren. Diese beiden, für einen Punkt in der Abbildung eingetragenen Strahlen lassen sich nun in vorteilhafter Weise in Komponenten zerlegen. Der Strahl an den Kreis besteht aus einem konstanten Strahl \mathfrak{K}_1 nach S und der laufenden Komponente \mathfrak{K}_2 . Ebenso setzt sich der Strahl an \mathfrak{G} zusammen aus der konstanten Komponente $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{K}_1$, der laufenden Komponente \mathfrak{G}_2 von S nach dem Skalenpunkt auf der Bezifferungsgeraden $\overline{\mathfrak{B}}$ und einer dritten Komponente \mathfrak{G}_3 von dort nach dem Skalenpunkt auf \mathfrak{G} . Diese dritte Komponente ist nun ebenfalls konstant, wenn die Skalenteilungen auf $\overline{\mathfrak{B}}$ und \mathfrak{G} gleichen Maßstab besitzen, was vorerst angenommen sei. Dann lassen sich aber je die konstanten und die laufenden Komponenten zusammenfassen. Die laufenden ergeben — wie man unmittelbar sieht — die kissoidale Erzeugung der Kubik von S aus (mit Hilfe des Kreises $\mathfrak{I}\mathfrak{K}_0$ und der Geraden $\overline{\mathfrak{B}}$), während die konstanten so berücksichtigt werden können, daß man den Ursprung S der kissoidalen Erzeugung um deren negative Werte verschiebt. Man erhält dann den neuen und endgültigen Ursprung \overline{O} in $-\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_3$.

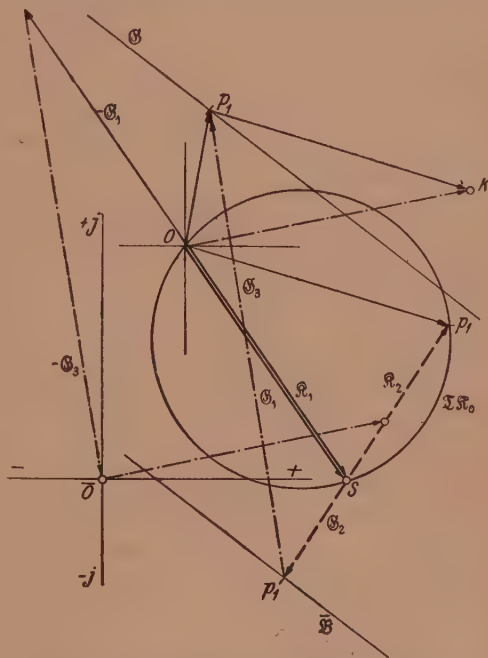


Abb. 4. Zur kissoidalen Erzeugung der zirkularen Kubik.

Um diese Konstruktion auf die Abb. 3 anwenden zu können, muß also noch die neue Bezifferungsgerade $\overline{\mathfrak{B}}$ so lange parallel zu sich selbst verschoben werden, bis ihre Bezifferung im gleichen Maßstab erscheint wie die auf \mathfrak{G} . Das geschieht am einfachsten durch Vergrößern ihres Abstandes von S im Verhältnis der Skaleneinheiten von $\overline{\mathfrak{B}}$ und \mathfrak{G} , also im Verhältnis $|\mathfrak{E}|$ zu $|\mathfrak{G}|$. Dabei muß aber beachtet werden, daß

die positiven Bezifferungsrichtungen auf der neuen Geraden $\overline{\mathfrak{B}}$ und \mathfrak{G} dieselben sind, wodurch die Lage von $\overline{\mathfrak{B}}$ ober- oder unterhalb von S bestimmt ist. ($\overline{\mathfrak{B}}$ wäre also falsch!)

Nunmehr kann auch \mathfrak{G}_3 von einem beliebigen Skalenpunkt (in der Abbildung für $p = -1$) an den gleichbezeichneten von \mathfrak{G} gezogen und der Ursprung um $-\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}_3$ nach \overline{O} verlagert werden. Die Kubik kann jetzt endgültig als Kissoide von $\mathfrak{I} \mathfrak{R}_0$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ gezeichnet werden.

4. Die kissoidale Erzeugung der bizirkularen Quartik.

Um zu einer kissoidalen Erzeugung der bizirkularen Quartik zu kommen, sei von der Tatsache ausgegangen, daß zu jeder solchen Kurve vier — darunter zwei reelle — Kreispaaire existieren, die zur kissoidalen Erzeugung benutzt werden können.⁶ Dabei liegt der Pol stets auf einem der Kreise; er wird zum Doppelpunkt der Quartik.

Es seien zunächst zwei Kreise in geeigneter Lage angenommen und dann versucht, die aus deren Addition erhaltene Gleichung mit der Gleichung der Quartik zu identifizieren.

Für die beiden Kreise seien die Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1 = R_1 e^{j2\psi} \quad (5)$$

und

$$\mathfrak{R}_2 = K_2 e^{j\psi} \quad (6)$$

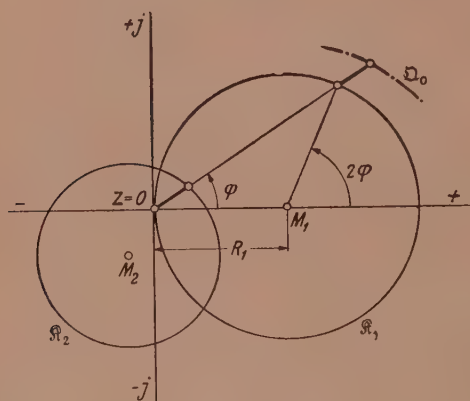


Abb. 5. Auswahl der Kreise für die kissoidale Erzeugung der bizirkularen Quartik.

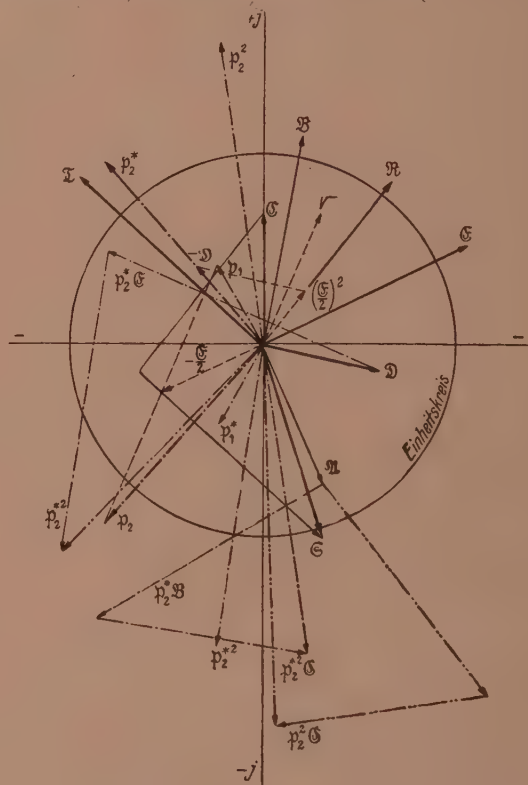


Abb. 6. Ermittlung der Konstanten.

angesetzt.² Der Kreis \mathfrak{R}_1 ist dabei auf seinen Mittelpunkt M_1 bezogen (s. Abb. 5), der sich auf der reellen Achse befindet. R_1 ist sein Halbmesser und er gehe durch den Ursprung.

Der zweite Kreis ist auf den Ursprung O bezogen; der Betrag K_2 seines Radiusvektors ist nach dem Ansatz (6) nicht konstant, sondern eine Funktion des Richtungswinkels φ

$$K_2 = K_2(\varphi).$$

⁶ E. Pascal: Repertorium der höheren Mathematik, Bd. II: Geometrie, 1. Hälfte. G. B. Teubner. 1910. (Nach Teixeira: Annali di Matematica pura ed applicata, Milano.)

Auf M_1 bezogen, lautet dann die Quartikgleichung:

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 = \Omega_2 + R_1 e^{j2\varphi} = \Omega_2 + R_1 \frac{\Omega_2}{\Omega_2^*}, \quad (7)$$

worin noch

$$e^{j2\varphi} = \frac{e^{j\varphi}}{e^{-j\varphi}} = \frac{K_2 e^{j\varphi}}{K_2 e^{-j\varphi}} = \frac{\Omega_2}{\Omega_2^*}$$

gesetzt wurde.⁷ Um die Gleichung der Quartik für allgemeine Lage zu bekommen, ist noch um einen Winkel (ϱ) zu verdrehen und das Diagramm um einen konstanten Betrag (\Re) zu verschieben. Man erhält dann

$$\Omega = \Re + \Omega_2 e^{j\varrho} + R_1 \frac{\Omega_2}{\Omega_2^*} e^{j\varrho}. \quad (8)$$

Diese Gleichung ist jetzt mit der Grundgleichung zu vergleichen. Das geschieht am besten durch Zerlegung in Wurzelfaktoren.⁸ Die Wurzeln des Nennertrinomies sind:

$$p_{1,2} = -\frac{\mathfrak{C}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C}}{2}\right)^2 - \mathfrak{D}}. \quad (9)$$

Nach der mit ihrer Hilfe erfolgten Zerlegung und dem Vergleich mit (8) erhält man nach längerer, aber elementarer Zwischenrechnung die neue Quartikgleichung

$$\Omega = \Re + \mathfrak{S} \frac{p_2^* - p}{p_1 - p} + \mathfrak{I} \frac{(p_1^* - p)(p_2^* - p)}{(p_1 - p)(p_2 - p)} \quad (10)$$

mit den Konstanten

$$\left. \begin{aligned} \Re &= \frac{\mathfrak{A} + p_2^* \mathfrak{B} + p_2^{*2} \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} + p_2^* \mathfrak{C} + p_2^{*2}}, \\ \mathfrak{I} &= \frac{\mathfrak{A} + p_2 \mathfrak{B} + p_2^2 \mathfrak{C}}{\mathfrak{D}^* + p_2 \mathfrak{C}^* + p_2^2}, \\ \mathfrak{S} &= \mathfrak{C} - \Re - \mathfrak{I}. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Damit ist aber die Konstruktion bereits bestimmt und in der folgenden Form leicht durchzuführen (s. Abb. 6 und 7).⁹

Man ermittelt zuerst p_1, p_2 nach (9) (s. Abb. 6) und zeichnet zusätzlich deren Spiegelbilder und Quadrate. Hierauf können die Konstanten nach (10a) auf elementare Weise bestimmt werden. Dabei ist noch zu bemerken, daß der Nenner bei \mathfrak{I} das Spiegelbild des Nenners bei \Re ist, also

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{A} + p_2 \mathfrak{B} + p_2^2 \mathfrak{C}}{\mathfrak{D}^* + p_2 \mathfrak{C}^* + p_2^2} = \frac{\mathfrak{A} + p_2 \mathfrak{B} + p_2^2 \mathfrak{C}}{(\mathfrak{D} + p_2^* \mathfrak{C} + p_2^{*2})^*}$$

geschrieben werden kann. Er braucht also nicht neu konstruiert zu werden.

Nunmehr kann bereits der Kreis Ω_1 mit dem Mittelpunkt \Re und dem Halbmesser $|\mathfrak{I}|$ gezeichnet werden. Er hat seinen Unendlichpunkt ($p = \infty$) in

$$\Omega_{1\infty} = \Re + \mathfrak{I}.$$

Für die Quartik findet man anderseits

$$\Omega_{\infty} = \Re + \mathfrak{S} + \mathfrak{I} = \mathfrak{C}.$$

Da diese beiden Punkte auf einer Erzeugenden der Quartik liegen müssen, braucht

⁷ Der Stern am Vektorzeichen bedeutet das Spiegelbild des Vektors bezüglich der reellen Achse

⁸ G. Oberdorfer: Lehrbuch der Elektrotechnik, Bd. II: Mathematik für Elektrotechniker. München: R. Oldenbourg. 1944.

⁹ Zur besseren Übersicht sind hier die Konstruktionen der Konstanten nach (10a) und die eigentliche Quartikkonstruktion nach (10) getrennt durchgeführt. Bei der praktischen Ausführung wird man sie meist im selben Diagramm vornehmen.

man sie nur miteinander zu verbinden und die Verbindungsgerade mit \aleph_1 zum Schnitt zu bringen, um das Projektionszentrum Z für die kissoidale Erzeugung zu erhalten.

Der Kreis

$$\aleph_2 = \mathfrak{Z} + \mathfrak{S} \frac{p_2^* - p}{p_1 - p} = \mathfrak{Z} + \mathfrak{S} + \mathfrak{S} \frac{p_2^* - p_1}{p_1 - p}$$

kann in der üblichen Weise ermittelt werden.² Man bildet zuerst die gespiegelte Nenner-

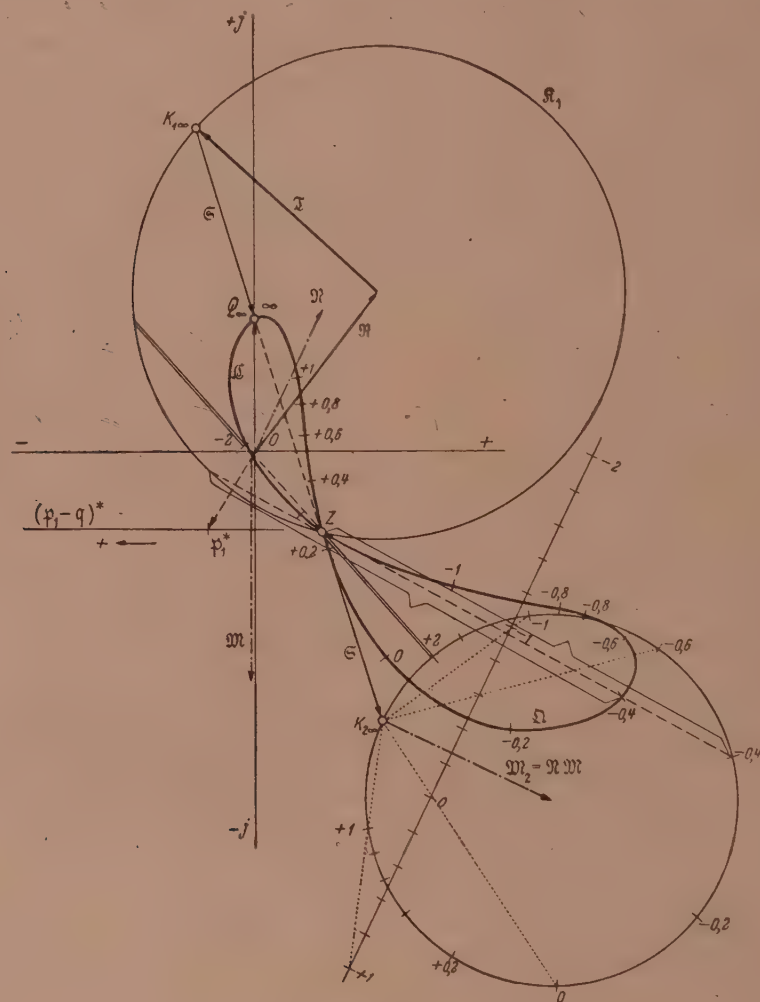


Abb. 7. Konstruktion der Quartik.

gerade $(p_1 - p)^*$, bestimmt den halben reziproken Normalabstand vom Ursprung als Halbmesser \aleph (der in die imaginäre Achse fällt) und erhält den Halbmesser \aleph_2 für \aleph_2 durch Drehstreckung mit

$$\aleph = \mathfrak{S} (p_2^* - p_1).$$

Ist der zweite Kreis \aleph_2 (diesmal mit Bezifferung) gezeichnet, dann kann die kissoidale Konstruktion ohne weitere Schwierigkeiten durchgeführt werden.

(Eingegangen am 10. Feber 1947.)

Persönliches.

Zur Erinnerung an Emil Müller.

(22. April 1861 bis 1. September 1927.)

Am 1. September 1947 jährte sich zum zwanzigsten Male der Todestag¹ des überragenden Wiener Geometers Emil Müller, der von 1902 bis zu seinem Ableben im Jahre 1927 als ordentlicher Professor und Vorstand der 1. Lehrkanzel für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien gewirkt hat. Anlässlich dieses Gedenktages sollen seine bedeutenden Leistungen neuerdings kurz gewürdigt werden.²

Müller war Sudetendeutscher, seine Wiege stand in Landskron in Böhmen. Seine wissenschaftliche Ausbildung genoß er jedoch zur Gänze in Wien, wo er überdies nach Abschluß seiner Studien durch vier Jahre bei seinem Lehrmeister Rudolf Staudigl an der Technischen Hochschule Assistentendienste versah. Daran anschließend war Müller in den Jahren 1892 bis 1902 an der Bau- gewerkschule in Königsberg als Oberlehrer tätig. Er trat dort mit den an der Universität wirkenden namhaften Mathematikern in engere Verbindung, promovierte zum Doktor der Philosophie und erwarb schließlich die *Venia legendi* für Geometrie und Mechanik.

Aus seinem überreichen Schaffen, wie es sich besonders nach seiner Berufung nach Wien entfaltete, seien im folgenden einige hervorstechende Züge herausgegriffen. Vor allem hat er die Vorlesungen und Konstruktionsübungen für die ihm anvertrauten Hörer des Bauingenieur- und Vermessungswesens sowie der Architektur meisterhaft ausgestaltet und dabei den praktischen Bedürfnissen dieser Fachrichtungen so weitgehend Rechnung getragen, wie dies vordem nirgends zu verzeichnen war. Hierin offenbarte sich in gleichem Maße seine unübertreffliche Lehrbegabung wie auch sein ausgesprochener Sinn für technische Anwendungen. Dieser leitete ihn auch bei der Herausgabe seiner „Technischen Übungsaufgaben für darstellende Geometrie“ (6 Hefte, Wien, 1910 bis 1926), die heute noch neben der von Müllers Amtsnachfolger E. Kruppa herrührenden moderneren Sammlung dieser Art gerne verwendet wird.



Emil Müller,

1912/13 Rector magnificus d. Technischen Hochschule Wien

Als zweite, nicht minder wichtige Aufgabe oblag Müller die Heranbildung von Lehramtskandidaten für darstellende Geometrie, denen überdies die (reine und angewandte) Mathematik als zweites Hauptfach vorgeschrieben war. Den Studiengang dieser Studierenden, der in Österreich nach mehrjähriger Unterbrechung jetzt wieder vorgesehen ist, hat er von Grund auf neu gestaltet. Er führte zu diesem Zweck — aufbauend auf seiner für die Techniker gehaltenen „Hauptvorlesung“ — eigene „Sondervorlesungen“ und vortrefflich geleitete Seminarübungen ein. Hierin nahm er die Gelegenheit wahr, einen größeren Kreis junger Geometer mit der größtenteils von ihm selbst herrührenden wissenschaftlichen Weiterbildung der darstellenden Geometrie vertraut zu machen, die tief in verschiedene Zweige der höheren Geometrie hineinführte. Dabei hat er auf die konstruktive Behandlung dieser Gegenstände und die Aufdeckung anschaulich-geometrischer Zusammenhänge stets den größten Wert gelegt. Es gelang ihm damit zugleich, einige bequeme, von der darstellenden Geometrie ausgehende Zugänge zur Gedankenwelt von Felix Klein, Sophus Lie und anderen bedeutenden Geometern freizulegen.

¹ Der vorliegende Aufsatz war ursprünglich für den 80. Geburtstag Emil Müllers bestimmt und konnte damals aus äußerlichen Gründen nicht erscheinen.

² Eine ausführliche Darstellung finden wir in E. Kruppa: Emil Müllers Leben und Wirken. *Mh. Math. Phys.* 35 S. 197—218 (1928).

Bei seinen Bemühungen um den Lehrernachwuchs für darstellende Geometrie wurde Müller von seinem Freund und Amtskollegen Theodor Schmid (1900 bis 1929 Vorstand der 2. Lehrkanzel für Darstellende Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien) sehr wirksam unterstützt, der in seinen Vorlesungen und Übungen über projektive Geometrie gleichfalls einen Grundstein zur synthetisch-konstruktiven Ausbildung der Lehramtskandidaten legte. Von den in Müllers „Sondervorlesungen“ und „Seminaren“ behandelten Gegenständen seien hervorgehoben: Projektive Verallgemeinerungen der gebräuchlichen linearen Abbildungen, die von Müller wesentlich weitergebildete zyklographische Abbildung, darstellende Geometrie der Regel-, Schraub- und Schiebflächen sowie gewisser nichteuklidischer und mehrdimensionaler Räume, kinematische Geometrie der Ebene und des Raumes, Liniengeometrie, Kartenprojektionen.

Von Müllers Persönlichkeit aufs stärkste angeregt, hat eine Reihe seiner Schüler an der Durchführung seiner Pläne teilgenommen und diese vielfach selbständig weitergeführt. So hat vor allem E. Kruppa den I. Band der aus den „Sondervorlesungen“ hervorgegangenen „Vorlesungen über darstellende Geometrie“, „Die linearen Abbildungen“ (Leipzig und Wien, 1923) bearbeitet, ferner hat der Verfasser dieser Zeilen den II. Band desselben Werkes, „Die Zyklographie“, aus dem Nachlaß herausgegeben (Leipzig und Wien, 1929) und den III. Band über „Konstruktive Behandlung der Regelflächen“ (Leipzig und Wien, 1931) ausgearbeitet. Außerdem sei auf die zahlreichen Abhandlungen hingewiesen, die damals im Kreise der durch Müller neu aufgeblühten „Wiener Schule“ der darstellenden Geometrie hervorgebracht wurden. Unter Müllers Einfluß sind ferner auch außerhalb von Wien und im Ausland wertvolle Arbeiten entstanden.

Seine eigenen wissenschaftlichen Forschungen hat Müller trotz seiner lehramtlichen Überbürdung mit nie erlahmendem Eifer pausenlos fortgeführt und insgesamt 62 zumeist richtungsweisende Arbeiten veröffentlicht. Hierbei sind die erwähnten drei Bände und sein in drei Auflagen erschienenes, vielgerühmtes „Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen“ (Leipzig, 1908, 1918, 1920) mitgezählt. Ein großer Teil seiner Arbeiten beschäftigt sich mit den bereits aufgezählten Gegenständen, ein anderer, nicht geringfügiger Teil ist der „Graßmannschen Ausdehnungslehre“ gewidmet, die von Müller im Sinne der Invariantentheorie ebenfalls grundlegend gefördert wurde. Auf dem Gebiete der Differentialgeometrie verdanken wir ihm vor allem die Schöpfung der „relativen Flächentheorie“.

Emil Müllers überaus erfolgreiches wissenschaftliches Schaffen spiegelt sich auch heute noch auf verschiedenen Gebieten geometrischer Forschung durch nachhaltig in die Zukunft wirkende Anregungen unvermindert wieder. Wir verweisen bloß auf die fruchtbare Weiterentwicklung der „relativen Flächentheorie“ durch W. Süß und die mannigfachen Fortschritte der darstellenden Geometrie verschiedenartiger nichteuklidischer und mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten, wie solche in Arbeiten von E. Kruppa, K. Strubecker und anderen zutage treten. Daneben sei noch folgender Punkt hervorgehoben: Müller war zeit seines Lebens der festen Überzeugung, daß die darstellende Geometrie sich immer mehr von ihren Schranken befreien und zu einer Wissenschaft umgestalten müsse, deren Aufgabe es ist, auf Grund allgemeiner Abbildungsgedanken die verschiedensten Aufgaben graphisch zu lösen, und zwar unter Verwendung aller irgendwie zweckmäßigen Hilfsmittel und Instrumente.³ Dem Verfasser gegenüber hat er darüber hinaus wiederholt die Hoffnung ausgesprochen, daß die zahlreichen bisher bekannt gewordenen Konstruktionsverfahren — wenn auch in veränderter Form — in den Naturwissenschaften und besonders in der Technik noch weitaus umfassender als dies damals der Fall war, eine nutzbringende Verwertung finden mögen. Er hat selbst solche Anwendungen gelegentlich angebahnt und andere dazu angeregt. Man erinnere sich an die Zusammenhänge zwischen Müllers „Verbiegung von Zykelreihen“ und den Verzahnungsaufgaben oder an die Erörterungen über Photogrammetrie im Rahmen des allgemeinen Zweibilderverfahrens. Da seither bei ähnlichen Fragestellungen ebenfalls beachtenswerte Erfolge erzielt wurden, ist zu erhoffen, daß in der vorwiegend konstruktiv betriebenen Geometrie eine mehr auf Anwendungen in anderen Wissenszweigen bedachte Forschungsrichtung, wie sie Müller bereits vorgeschwebt sein mag, immer breiteren Raum gewinnen wird. Eine solche Entwicklung würde dem geistigen Vermächtnis Emil Müllers wohl ebenso gerecht wie die weitere Fortführung seiner abstrakteren geometrischen Ideen. Denn für die Fortschritte der darstellenden Geometrie, die ihm so sehr am Herzen lagen, haben immer schon praktische Anwendungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle gespielt. Die erwähnte Forschungsrichtung wird überdies wesentlich dazu beitragen, daß die darstellende Geometrie, diese altbewährte Hilfswissenschaft der Technik und der Naturwissenschaften, auch in der Zukunft intensiv gepflegt wird und in immer weiteren Kreisen die ihr gebührende Beachtung findet.

³ S. „Die Zyklographie“, Vorwort.

Buchbesprechungen.

Ergänzungen zur Experimentalphysik. Einführende exakte Behandlung physikalischer Aufgaben, Fragen und Probleme. Von *H. Greinacher*. Zweite, vermehrte Auflage. Mit 82 Textabb., X, 186 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 26.—. Im Ausland: sfr 12.—.

Das kleine Büchlein hat sich zur Aufgabe gestellt, zahlreiche Probleme der Experimentalphysik zu besprechen, die mehr am Rande des Stoffgebietes liegen und daher in der systematischen Darstellung der großen Lehrbücher keinen Platz finden, die aber trotzdem Beachtung verdienen, teils wegen ihrer praktischen Bedeutung, teils wegen der reizvollen Behandlungsmethode.

Der Inhalt gliedert sich in die Abschnitte: Mechanik, Akustik und Wellenlehre, Wärmelehre, Optik (Strahlungslehre), Elektrizität und Magnetismus, worin auch ein paar Aufgaben der Radiologie einbezogen sind.

Die Aufgaben sind zum Teil der Meßtechnik, teilweise auch der technischen Praxis entnommen, manche beziehen sich auf Gedankenexperimente oder weisen auf interessante Beziehungen scheinbar verschiedenartiger Probleme hin. Die Schlußweise ist in einzelnen Fällen nicht ganz exakt.

An mathematischen Kenntnissen werden nur die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Der physikalische Gehalt entspricht etwa den ersten Semestern der Hochschule. Das Buch wird besonders von Studierenden mit großem Nutzen gelesen werden, da es interessante Anregungen bringt, das in den Vorlesungen Gehörte auf spezielle Aufgaben anzuwenden.

E. R. Berger, Wien.

Einführung in die Technische Chemie. Von *K. W. Geisler*. Dritte, unveränderte Auflage. Mit 17 Abb. und 5 Tab. im Text, IV, 68 S. Wien: F. Deuticke. 1947. S 6.—.

Das schon in 3. Auflage erschienene Büchlein ist ein eigenartiges Werk. Auf bloß 68 Seiten bringt es nicht nur die „Grundlagen der Chemie“, sondern auch eine knappe „Einführung in die technische Chemie“. — Erstaunlich, wie gut der Verfasser die Aufgabe, auf gedrängtestem Raum solides Wissen für Besucher kurzer technischer Lehrgänge, Abendkurse usw. zu vermitteln, gelöst hat.

Natürlich kann man von einem solch bescheidenen Büchlein weder viel erwarten noch verlangen — auch kann es nur einige wenige Kapitel aus der technischen Chemie beismalsmäßig bringen. Da aber die „Grundlagen“ und die „Einführung in die technische Chemie“ klar und richtig dargestellt sind, ferner die Bilder (z. B. Gaswerk, Drehrostgaserzeuger, Kohleverflüssigung, Benzinsynthese nach Fischer-Tropsch, Kupferseidengewinnung u. a.) recht instruktiv sind, kann das kleine Werk empfohlen werden.

A. Chwala, Wien.

Ausgewählte Kapitel aus der Physik. Nach Vorlesungen an der Technischen Hochschule in Graz. Von *K. W. F. Kohlrusch*. In fünf Teilen. Wien: Springer-Verlag. 1948. I. Teil: Mechanik. Mit 35 Textabb., VI, 105 S. In Österreich: S 16.—. Im Ausland: sfr 6.60. II. Teil: Optik. Mit 73 Textabb., VI, 146 S. In Österreich: S 20.—. Im Ausland: sfr 9.60.

Zwei der geplanten fünf Hefte: I. Mechanik, II. Optik, III. Wärme, IV. Elektrizität, V. Aufbau der Materie, liegen vor. Wie der Verfasser erwähnt, handelt es sich hauptsächlich um einen durch die großen Hörerzahlen notwendig gewordenen Studienbehelf, der einerseits den heute leider unregelmäßigen Vorlesungsbesuch überbrücken, andererseits dem derzeitigen Mangel an Lehrbüchern abhelfen soll. Ohne Zweifel hat aber der Verfasser nicht nur die sich ursprünglich gestellte Aufgabe erfüllt, sondern darüber hinaus eine kurze, klare Zusammenfassung seines Vorlesungsstoffes gegeben, die nicht nur für Studenten von Interesse ist. Im I. Teil findet man unter anderem einen kurzen Abriß über die spezielle Relativitätstheorie, eine leider sehr kurze Andeutung der allgemeinen Relativitätstheorie und eine knappe Einführung in die Wellenmechanik. Der II. Teil enthält neben den üblichen Abschnitten einiges über die Lichtquantenstrahlung. Beiden Teilen ist eine kurze Zusammenstellung des Mittelschulstoffes, den der Leser kennen sollte, vorangestellt. Man darf die nächsten drei Hefte mit großem Interesse erwarten.

F. Magyar, Wien.

Mathematik, Logik und Erfahrung. Von *V. Kraft*. VII, 129 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. In Österreich: S 18.—. Im Ausland: sfr 10.—.

Im ersten Abschnitt: „Die empirische Geltung der Mathematik“ befaßt sich der Autor mit Arithmetik und Geometrie. Die natürlichen Zahlen gelten in der Erfahrung, weil sie durch Mengeneigenschaften definiert sind bzw. ihnen solche zugeordnet werden können, weil das zur Bildung von Mengen erforderliche Diskrete wesentlich der Erfahrung angehört und weil jede endliche, aus empirischen Einzelnen gebildete Menge unter eine der Mehrheitsarten fallen muß, die in den natürlichen Zahlen konstruiert sind, da diese das vollständige System derselben bilden.

Die Untersuchung der Grundrechnungsarten, der erweiterten Zahlen und das Rechnen mit diesen ergibt, daß die Arithmetik deshalb in der Erfahrung gilt, weil man den natürlichen Zahlen und den auf diese zurückführbaren erweiterten Zahlen einen über ein bloß formales Axiomensystem hinausgehenden Sinn geben kann, indem man sie auf in der Erfahrung gegebene Mengen bezieht. Allerdings läßt sich die Arithmetik nicht bedingungslos auf das ganze Gebiet der Erfahrung anwenden. Sie gilt nur für Diskretes, für Kontinuierliches hingegen bloß insofern, als man Diskretes dadurch herstellen kann, daß man den kontinuierlichen Übergang durch künstliche Abgrenzungen aufhebt. Diese Anschauung scheint mit neueren Erkenntnissen durchaus im Einklang zu stehen.

In Räumen verschiedenster Krümmung bestehen — im Gegensatz zur Kantschen Auffassung — viele Geometrien gleichberechtigt nebeneinander, die sich durch ihre Metrik und Topologie unterscheiden. Die euklidische Geometrie ist also nicht die einzige, wohl aber die einfachste. Besonderes Augenmerk wendet der Autor der in der allgemeinen Relativitätstheorie benützten Geometrie zu. Bekanntlich handelt es sich dabei nicht um einen Vorstellungsraum, sondern um eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit von Koordinaten, für welche die Bezeichnung Raum-Zeit-Raum gewählt wurde. Eine Strecke in dieser vierdimensionalen Welt stellt den Abstand zweier Ereignisse, sog. Weltpunkte, dar und kann nicht direkt gemessen werden. Die Relativitätstheorie vermeidet dies, indem sie ein differentielles Linienelement benützt, das sich auf benachbarte Punkte bezieht, hingegen aber die Metrik im großen offen läßt. Vielleicht wäre es interessant gewesen, wenn der Autor darauf eingegangen wäre, daß der uns eingelernte sog. Raum unserer Anschauung gerade dieser durch seine Unendlichkeit große Schwierigkeiten bereiten muß.

Die Anwendbarkeit der Geometrie, die an und für sich keine Beziehung zur Erfahrung hat, hängt von der Möglichkeit einer Zuordnung von empirischen Objekten zu den Elementen und Beziehungen einer reinen Geometrie, d. h. von den Grundlagen der Messung ab. Wohl gibt es in der Erfahrungswelt keine starren Körper, aber die Änderung, die sich unter der Einwirkung ihrer Umgebung ergibt, läßt sich durch Versuche gesetzmäßig festlegen. Man kann Körper finden, die ihre Länge am wenigsten ändern, die man bei einer bestimmten Genauigkeit als starr ansehen darf. Die Meßgrundlagen werden also nicht — wie der Konventionalismus behauptet — durch willkürliche Festsetzungen, sondern durch empirische Hypothesen, d. h. durch Naturgesetze bestimmt. Ebenso wenig wie alle natürlichen Zahlen müssen nicht alle möglichen Räume tatsächlich a priori konstruiert werden. Wenn ihr Bildungsgesetz ihre Vollständigkeit gewährleistet, muß irgendeines der unabhängig von der Erfahrung konstruierten Systeme auf die Erfahrung anwendbar sein.

Im zweiten Abschnitt befaßt sich der Autor, der dem „Wiener Kreis“ um Schlick nahesteht, mit der Widerlegung des Konventionalismus, dem insofern große aktuelle Bedeutung zukommt, als ihn Forscher vom Rang Poincarés und Eddingtons vertreten. Die Frage „Festsetzung oder Erfahrung“ wird zugunsten der letzteren entschieden. Selbstverständlich kann aber der Empirismus nur hinsichtlich der Realerkenntnis, nicht aber in bezug auf Mathematik und Logik gelten.

Im letzten Abschnitt, der den Anwendungsgebieten der Logik gewidmet ist, kommt der Autor schließlich zu dem Ergebnis, daß die Anwendung der Logik an die Bedingung der Herstellbarkeit von Ordnung und Gesetzmäßigkeit gebunden ist. Die Erfüllung oder Nichterfüllung dieser Bedingung ergibt einen Unterschied in der Art einer Mannigfaltigkeit im Sinne von rational oder irrational, d. h. der Anwendbarkeit der Logik gemäß oder nicht gemäß.

Es kommt gar nicht darauf an, welche Stellung der Leser zu den Ansichten des Autors nimmt. Das Buch ist sehr interessant, flüssig geschrieben und leicht zu lesen. Leider ist es etwas zu kurz gehalten. Der Leser, der sich noch wenig mit der Materie beschäftigt hat, wird vieles nachlesen müssen. Der Wert des Buches liegt aber gerade in der Anregung solcher philosophisch wenig geschulter Leser, die in der Mathematik immerhin mehr als ein bloßes Hilfsmittel sehen wollen.

F. Magyar, Wien.

Natur und Erkenntnis. Die Welt in der Konstruktion des heutigen Physikers. Von A. March. Mit 18 Textabb., VIII, 239 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 36.—. Im Ausland: sfr 18.—.

Das Buch beschäftigt sich mit den Fortschritten der Physik auf den folgenden Gebieten: Korpuskel und Welle. Die Doppelnatur des Lichtes. Das Wesen der Partikeln. Die kosmische Strahlung. Die Kernkräfte.

Der Vorstoß in den Mikrokosmos hat neue grundsätzliche Einstellungen in der Physik veranlaßt. Dies schildert der Verfasser unter Verzicht auf mathematische Entwicklungen, damit auch der Nichtfachmann in die Lage versetzt werden soll, sich ein klares Urteil darüber bilden zu können. Die in den Formeln versteckten Gedanken sucht der Verfasser bloßzulegen. Ob das in allen Fällen, wie etwa bei der Schilderung der Matrizenmechanik, auf die gewünschte Weise gelungen ist, sei dahingestellt. Jedenfalls sind die Auseinandersetzungen breit, sozusagen im

Plauderton gehalten, und gewiß dazu angetan, in möglichst allgemeinverständlicher Weise tiefe Einblicke zu gewähren.

Der Verfasser setzt sich eifrig für den Positivismus ein, die erkenntnistheoretische Einstellung, welche tatsächlich die geschilderte Entwicklung tonangebend beherrschte. Dabei spielen in Erneuerung der Machschen Philosophie Gedankenexperimente eine ausschlaggebende Rolle. Auf Grund der Heisenbergschen Ungenauigkeitsbehauptung, wie Schrödinger das bezeichnet, wurde so das atomare Einzelgeschehen als akausal angesehen und bloß das Bestehen einer statistischen Kausalität zugelassen. Aus der Geschichte der Naturwissenschaften ist bekannt, daß vorübergehend auch mit mystischen Vorstellungen bedeutende Fortschritte erzielt wurden. Vielleicht gelingt es einmal, neue Bilder zu ersinnen, welche das Mikrogesehen befriedigender darstellen. Derzeit haben wir kein anderes System, das eine geschlossene Ordnung in die Erscheinungen des Mikrokosmos bringt. Seine populäre Darstellung durch den Verfasser ist daher von allgemeinem Interesse.

Dem eigensten Arbeitsgebiet des Verfassers entnommen ist die zum erstenmal in allgemeinverständlicher Form dargestellte Theorie der „kleinsten Länge“, durch welche verhängnisvolles Unendlichwerden von Energieausdrücken verhindert wird, was nur in Zusammenhang mit dem ganzen Fragenkomplex des Mikrokosmos klargemacht werden konnte. Der Verfasser sieht in der „kleinsten Länge“ eine neue fundamentale Konstante, welche eine ähnlich wichtige Rolle spielt, wie schon bisher die Vakuumlichtgeschwindigkeit und das Plancksche Wirkungsquantum. Er deutet diese „kleinste Länge“ als den Abstand, den zwei Partikel mindestens haben müssen, um durch ein angegebenes Gedankenexperiment als nicht zusammenfallend erkannt werden zu können.

L. Flamm, Wien.

Mechanik. Von E. Meißner (†) und H. Ziegler. Basel: E. Birkhäuser. Band I: Statik der starren, flüssigen und elastischen Körper. Mit 409 Textabb., 340 S. 1947. sfr 32.—, geb. sfr 36.—. Band II: Dynamik der starren Körper. Mit 229 Textabb., 291 S. 1947. sfr 28.50, geb. sfr 32.50.

Nach dem Heimgange Ernst Meißners (1939), der als Ordinarius für Technische Mechanik an der E. T. H. Zürich über drei Jahrzehnte lang höchst erfolgreich gewirkt hat und dem die Technische Mechanik unter anderem die elegante exakte Lösung des Elastizitätsproblems der Rotationsschalen und eine Methode der graphischen Integration von totalen Differentialgleichungen (Linienbildverfahren) mit mannigfachen technischen Anwendungsmöglichkeiten zu verdanken hat, trat dessen Nachfolge sein Schüler Hans Ziegler an.

Die Ausführung seines schon nach mehrjähriger Lehrtätigkeit geplanten Vorhabens, eine „im ganzen möglichst umfassende und zugleich im einzelnen denkbar knappe Darstellung“ der gesamten elementaren Mechanik zu geben, wurde beschleunigt durch den in den Nachkriegsjahren infolge des Ausfalles der deutschen Verlegertätigkeit entstandenen, in Hörerkreisen schwer empfundenen Mangel an geeigneten Lehrbüchern der Technischen Mechanik.

Da dem Autor bei der Abfassung seines Werkes die nach den Vorlesungen Meißners gemachten Aufzeichnungen — mehrmals überarbeitet und zum Teil erheblich um- bzw. ausgebaut — als Grundlage dienten, trägt das neue Werk auch den Namen Meißners als Mitverfasser.

Das Werk erscheint in drei Bänden, von denen bisher zwei herausgekommen sind. Der erste Band umfaßt die Statik der starren Körper, die Hydrostatik und die Elastostatik (mit Beschränkung auf die elementare technische Festigkeitslehre). Im zweiten Band wird die Dynamik des einzelnen Massenpunktes und des starren Körpers behandelt, wobei das Schwerkraft auf der Kinetik liegt, während die Kinematik nur jeweils soweit entwickelt wird, als dies für das Verständnis der Kinetik erforderlich ist.

Der noch fehlende dritte Band soll die Dynamik von Systemen starrer Körper zusammen mit der Dynamik von elastischen Körpern und von Flüssigkeiten bringen.

Es kommt der Einheitlichkeit der Darstellung sehr zustatten und ermöglicht die Vermeidung gewisser Wiederholungen, wenn das Gesamtgebiet der Technischen Mechanik von einem einzigen Verfasser behandelt wird und es ist begreiflich, daß die Bewältigung dieses großen Stoffgebietes in drei durchaus nicht übermäßig starken Bänden den bewußten Verzicht auf zahlreiche interessante Anwendungen und die Beschränkung auf ein Minimum an Beispielen erfordert. Trotzdem enthalten die beiden vorliegenden Bände in didaktisch sehr geschickter Anordnung im wesentlichen alles, was in den Hauptvorlesungen über die den angegebenen Buchtiteln entsprechenden Teilgebiete der Mechanik an einer Technischen Hochschule behandelt zu werden pflegt.

Die Entwicklungen und Beweisführungen sind klar und anschaulich und werden durch eine große Zahl sorgfältig gezeichneter Abbildungen unterstützt.

Abschließend kann gesagt werden, daß es dem Verfasser durchaus gelungen ist, sein eingangs umrissenes Ziel vollauf zu erreichen, so daß mit diesen beiden vom Verlag mustergültig ausge-

statteten Bänden ein sehr erfreulicher Lehrbuchzuwachs in der Technischen Mechanik angezeigt werden kann.

Die hiermit ausgesprochene besondere Empfehlung der beiden Bücher, denen der das ganze Werk abschließende und krönende dritte Band hoffentlich bald nachfolgt, wird freilich wegen des für unsere Verhältnisse hohen Anschaffungspreises vorläufig noch praktisch wenig wirksam sein.

K. Federhofer, Graz.

Die Steuerung der Verbrennungskraftmaschinen. Von A. Pischinger. (Die Verbrennungskraftmaschine. Herausgegeben von H. List, Band 9.) Mit 269 Textabb., VII, 240 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 120.—. Im Ausland: sfr 60.—.

Dieses als Band 9 der Sammlung „Die Verbrennungskraftmaschine“ erschienene Werk behandelt sehr ausführlich die Steuerung des Ladungswechsels durch Ventile und Schieber (Abschnitt A, B und C), wobei besonders das Kapitel über die Mechanik des Nockentriebes, die Bewegungsverhältnisse (Kinematik) und das Kräftespiel (Dynamik) betreffend hervorgehoben sei. Weitere Abschnitte sind der Steuerung des Anlaßvorganges und der Umsteuerung gewidmet. Das verständlich und klar geschriebene Buch ist mit zahlreichen schematischen und Konstruktionszeichnungen ausgestattet. Es wird dem praktisch tätigen Ingenieur und dem Studierenden als bisher vermißter Behelf sehr willkommen sein. Die Ausstattung des Buches ist von friedensmäßiger Qualität und das Studium desselben jedem Interessenten zu empfehlen.

O. Kämmerer, Wien.

Praktische Statik. Einführung in die Staubberechnung der Tragwerke mit besonderer Rücksicht auf den Hoch- und Stahlbetonbau. Von R. Saliger. Fünfte Auflage mit Berücksichtigung der geltenden Normen. Mit 660 Textabb., XV, 686 S. Wien: F. Deuticke. 1947. S 90.—, geb. S 100.—.

Seit der ersten Auflage erscheint dieses Werk Saligers in immer kürzer werdenden Intervallen in verbesserten und ergänzten Ausgaben, die wieder bald vergriffen sind. Es mag den Verfasser mit Stolz erfüllen, daß seine Auswahl des einschlägigen Stoffes, die Art der Darstellung desselben, ausgehend von den einfachsten Problemen der Statik und Festigkeitslehre, die dem Leser durch viele Aufgabenbeispiele aus der Praxis verständlicher gemacht werden, die restlose Anerkennung gebracht hat. Dem Lernenden ist das Buch ein viel benützter Wegweiser, der ihn methodisch bis zum Verständnis der schwierigsten Aufgaben der Baustatik, wie sie statisch unbestimmte Tragwerke stellen, vordringen läßt. Der in der Baupraxis stehende Statiker nimmt das Buch gerne zur Hand, da es ihm, insbesondere auf dem Gebiete der Hochbaukonstruktionen, alle notwendigen Unterlagen, wie Einheitsgewichte, Lastangaben, behördliche Vorschriften usw., liefert, die ihm andere Handbücher entbehrllich machen.

Die Ausstattung des Werkes — und da muß auch dem Verleger Anerkennung gezollt werden — ist eine vorzügliche.

Fortschritte in den Berechnungsmethoden und Neuerungen in den Normvorschriften wurden in der Neuauflage berücksichtigt. Im Anschluß an die vom Verfasser entwickelte Berechnungsmethode von hochgradig statisch unbestimmten Steifrahmen mittels der Einspanngrade ist die Berechnung solcher Steifrahmen nach dem Annäherungsverfahren von Croß neu in das Werk aufgenommen worden. Der Abdruck der Normen für alle im Hochbau vorkommenden Konstruktionen, wie Belastungsannahmen, zulässige Beanspruchungen für Baustoffe und Baugrund, und Vorschriften für Sonderbauwerke, wie hohe Schornsteine usw., wird dem schaffenden Konstrukteur willkommen sein. Die zahlreichen Literaturhinweise zeigen den Weg zur Weiterbildung über den Inhalt des Buches hinaus. Das Stichwörterverzeichnis macht das Buch zu einem rasch zielführenden Nachschlagewerk.

F. Pongratz, Wien.

Vorlesungen über Baustatik. Band I: Statisch bestimmte Systeme, Spannungsberechnung, elastische Formänderungen, Stabilitätsprobleme, Seile. Von F. Stüssi. (Lehr- und Handbücher der Ingenieurwissenschaften: Nr. 1.) Mit 336 Textabb., XII, 368 S. Basel: E. Birkhäuser. 1946. sfr 34.50, geb. sfr 38.50.

Das in den Nachkriegsjahren immer fühlbarer gewordene Fehlen an geeigneten Lehrbüchern der Ingenieurwissenschaften drängt im Vereine mit dem ungewöhnlichen Zustrom von Studierenden zu den Technischen Hochschulen auch in der Schweiz zu energischer Abhilfe durch neu verfaßte Lehrbücher. Der Birkhäuser-Verlag in Basel hat es sich unter anderem zur Aufgabe gemacht, eine Reihe von Lehr- und Handbüchern der Ingenieurwissenschaften herauszubringen, von denen bisher neben einer von R. Fueter bearbeiteten „Analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes“ und den vorstehend besprochenen zwei Bänden Mechanik von E. Meißner und H. Ziegler auch der erste Band der Baustatik von F. Stüssi, dem Ordinarius für Baustatik, Hoch- und Brückenbau in Stahl und Holz an der E. T. H. Zürich, erschienen ist.

Das Buch umfaßt in etwas erweiterter Form den Stoff, der den Studierenden der Abteilung für Bauingenieurwesen an der E. T. H. Zürich im dritten Semester vorgetragen wird. Es enthält in seinen 10 Hauptabschnitten die Berechnung der inneren Kraftwirkungen in statisch bestimmten Systemen (ebene Vollwandträger und ebene Fachwerke einschließlich der kinematischen Fachwerktheorie sowie Raumbauwerke), die klassische Biegelhre nebst den bei Fehlen ihrer Voraussetzungen wichtigen Ergänzungen (veränderlicher Querschnitt, gekrümmte Stäbe mit dünnen Flanschen, Torsion mit Flanschbiegung, Biegung und Verdrehung von Stäben mit T-Querschnitt), die Berechnung der elastischen Formänderungen ohne Benutzung der virtuellen Arbeitsgleichung (Theorie der Biegelinien gerader und gekrümmter Stäbe, Williot'scher Verschiebungsplan ebener Fachwerke und die Sätze von Castigliano).

Es folgt dann eine Einführung in die Behandlung von Stabilitätsproblemen (Knicken, Kippen und Ausbeulen), wobei die Beulerscheinungen vorläufig nur mit einer knappen Skizzierung des Problems an Hand eines einfachen Beispiels berücksichtigt werden.

Die Statik des Seiles mit Berücksichtigung seiner Formänderungen und Entwicklung der Elastizitätsbedingung bei Festhaltung oder elastischer Verankerung der Seilenden sowie eine Untersuchung des Einflusses elastisch nachgiebiger Zwischenstützung bei über mehrere Felder durchlaufenden Seilen beschließt den behandelten Stoff.

Die elastischen Formänderungen und die allgemeine Theorie statisch unbestimmter Systeme sowie besondere Tragsysteme und die Erddrucktheorie sollen in einem folgenden, von M. Ritter (Zürich) bearbeiteten Bande, Baustatik II, ihre eingehende Darstellung finden.

Systematisch wird der Studierende, von den Anfangsgründen der Baustatik ausgehend, in klarer Weise in die angegebenen Stoffgebiete eingeführt; bei der Fülle des auf 368 Seiten Dargebotenen mußte natürlich die Beifügung von Zahlenbeispielen unterbleiben, auf die um so leichter verzichtet werden konnte, als alle Entwicklungen unter Beigabe zahlreicher sauberer Figuren soweit durchgeführt sind, daß ihre zahlenmäßige Verwertung unmittelbar möglich ist.

Das sehr schön ausgestattete Buch kann den Studierenden der Baustatik bestens empfohlen werden.

K. Federhofer, Graz.

Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Zum Vorlesungsgebrauch und zum Selbststudium. Von K. Wolf. Zweite, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 250 Textabb., IX, 370 S. Wien: Springer-Verlag. 1947. In Österreich: geb. S 54.—. Im Ausland: geb. sfr 32.—.

Inhaltlich ist die zweite Auflage des Buches im wesentlichen unverändert geblieben, doch wurden zwei große Beispiele aus der technischen Praxis neu aufgenommen und die Zahl der Aufgaben vermehrt.

Der Stoff ist gegliedert in eine Einleitung und vier Teile: Statik, Kinematik des Massenpunktes, Kinematik des starren Körpers, Dynamik des starren Körpers und starrer Systeme. Der Inhalt des Werkes geht aber zum Teil hinaus über den Umfang, der durch den Titel begrenzt erscheinen könnte; es wird z. B. die Mechanik der Seile besprochen und die Stoßvorgänge.

Die Statik nimmt etwa den dritten Teil des Buches ein. Die übrigen Abschnitte sind jenen Gebieten der Kinematik und Dynamik gewidmet, die für die technischen Anwendungen Bedeutung haben. Der Begriff des skalaren Potentials wird gebracht im Zusammenhang mit den Begriffen des Kraftfeldes und der Arbeit. Als Darstellungsmittel ist Gebrauch gemacht von algebraischen und graphischen Behandlungsweisen und von der Vektorrechnung. Bei der Besprechung der Dynamik des starren Körpers wird auch der Tensorbegriff herangezogen. Daß bei der Lösung dynamischer Aufgaben vom D'Alembertschen Prinzip nicht allzuviel Anwendung gemacht ist, halte ich für vorteilhaft im Hinblick auf den Umstand, daß der physikalische Sinn dieses Satzes häufig vollkommen mißverstanden wird und beim Studierenden bei der Lösung von Aufgaben wohl nicht nur ein mathematisch richtiges Endergebnis erzielt werden soll, sondern auch ein richtiges physikalisches Verständnis des betreffenden Vorganges, was durchaus nicht immer gleichbedeutend ist.

Die Darstellungsweise des Buches ist klar und deutlich, so daß es sehr geeignet zum Studium ist. Das Erscheinen der neuen Auflage zeigt ebenfalls, daß es dem Verfasser gelungen ist, ein sehr brauchbares Werk zu schaffen.

In ganz losem Zusammenhang mit dem Vorhergehenden mögen hier noch ein paar Worte gesagt werden über die verschiedenen Benennungen, die für die Größen $m \bar{v}$ und $\bar{r} \times m \bar{v}$ gebraucht werden (m Masse, \bar{v} Geschwindigkeitsvektor, \bar{r} Ortsvektor). Nennt man die erste „Bewegungsgröße“, so ist folgerichtig die zweite Moment der Bewegungsgröße zu nennen oder „Bewegungsgrößenmoment“. Bei einem Punktsystem (Punkthaufen) wäre „resultierende Bewegungsgröße“ oder „Bewegungsgröße des Systems“ zu sagen und „Bewegungsgrößenmoment des Systems“. Da diese Namen umständlich sind, hat man sich bemüht, kürzere zu verwenden. Nach Klein und Sommerfeld (Theorie des Kreisels) hätte man im Anschluß an Thomson und Tait dafür die Benennungen „Impuls“ und „Impulsmoment“, die zwar wörtlich genommen

unrichtig sind, sich aber wegen ihrer Kürze empfehlen. „Impuls“ ist wörtlich gleichbedeutend mit „Kraftantrieb“ (Zeitintegral der Kraft). Man kann sich die Bewegungsgröße jeweils ersetzt denken durch den ihr gleichen Kraftantrieb vom Ruhezustand aus. Natürlich darf man dann die Ausdrücke Impuls und Kraftantrieb nicht mehr als gleichbedeutend anwenden; es gilt jetzt eben die Beziehung: Der Kraftantrieb ist gleich der Änderung des Impulses, und Sinngemäßes gilt für die Momente. Ich habe vor Jahren die Ausdrücke „Schwung“ und „Schwungmoment“ vorgeschlagen, die recht passend erscheinen. Wäre diese Anregung aus Göttingen gekommen, so hätte sie gewiß mehr Erfolg gehabt. Für das Schwungmoment ist vielfach das Wort „Drall“ in Aufnahme gekommen, ein Name, zu dessen Gunsten außer seiner Kürze wohl gar nichts spricht, schon weil es gewiß nicht zweckmäßig ist, so eng zusammenhängende Größen, wie $m \bar{v}$ und $\bar{r} \times m \bar{v}$, mit ganz verschiedenartigen Namen zu belegen. Die Bezeichnungen Impuls und Impulsmoment in der besprochenen Bedeutung werden viel verwendet. Deshalb halte ich es für das Beste, wenn man sich schon nicht nur für einen Namen entscheiden will, entweder zu sagen „Impuls“ und „Impulsmoment“ oder „Schwung“ und „Schwungmoment“. Diese letzteren Bezeichnungen sind im vorliegenden Buch verwendet.

F. Jung, Wien.

100 Übungen aus der Mechanik. Von E. Pawelka. Zusammengefaßte und erweiterte 4. und 2. Auflage von „Übungen aus der Mechanik“, I. und II. Band. Mit 154 Textabb. IV, 187 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 24.—. Im Ausland: sfr. 11.—.

Die beiden 1944 und 1945 erschienenen Bände „Übungen aus der Mechanik“, die von der Fachwelt sehr gut aufgenommen wurden, sind allgemein bekannt. Leider sind sie inzwischen längst vergriffen. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß sich der Verfasser entschlossen hat, die beiden Bände zusammengefaßt und entsprechend ergänzt neu herauszubringen.

Behandelt werden interessante und wichtige Probleme aus den Kapiteln: Kinematik, Statik, Kinetik, Elastizität und Elastische Schwingungen und Wellen.

Wenn sich der Verfasser die Aufgabe stellt, das Interesse für die Mechanik zu erwecken, so hat er sein Ziel wirklich erreicht. Die behandelten Aufgaben sind aus der Praxis, umfassen aber im Gegensatz zu manchen Aufgabensammlungen, die gekünstelte Fragenstellungen durch elementare, mit der Mechanik in keinerlei Beziehung stehende Spitzfindigkeiten zu erschweren suchen, die klassischen Grundlagen der Mechanik, deren Anwendung in klarer Form gezeigt wird. Das Buch erleichtert daher nicht nur das Studium, sondern hilft auch dem ausführenden Ingenieur über mancherlei Schwierigkeiten hinweg.

Die Ausstattung des Buches ist sauber und übersichtlich.

F. Magyar, Wien.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Soeben erschienen:

Ingenieurgeologie

Ein Handbuch für Studium und Praxis

Von

Ludwig Bendel

Dipl. Bauingenieur, Doktor der Naturwissenschaften (Geologie)
Privatdozent der École Polytechnique de l'Université de Lausanne
Luzern

Zweite Hälfte

Mit 620 Abbildungen. XIX, 832 Seiten. 1948

In Österreich geb. S 294.—, im Ausland geb. sfr. 135.—

Der erste, 1944 erschienene (seither vergriffene und in neuer Bearbeitung in Vorbereitung befindliche) Band befaßt sich mit den theoretischen Grundlagen, der zweite Band bringt die Praxis der Ingenieurgeologie: **Bodenuntersuchungen** (im Feld, im Prüfraum, Modell- und Elementarversuche), die **Anwendungen** (Rutschungen und Bergstürze, Gründungen, Erdbau, Straßenbaugeologie, dynamische Baugrundaufgaben, Bodenverdichtung, Bodenverfestigung und Bodenabdichtung, Schnee, Lawinen, Firn und Gletscher, bodenkundliche Arbeiten für die Stadt- und Landesplanung) und das ausführliche **Sachverzeichnis für das Gesamtwerk**

Soeben erschienen:

Laufzeittheorie der Elektronenröhren

Von

Dr. H. W. König, Wien

Erster Teil: **Ein- und Mehrkreissysteme.** Mit 72 Abbildungen. XII, 210 Seiten. 1948. In Österreich S 78.—, im Ausland sfr. 36.—

Zweiter Teil: **Kathodeneigenschaften, Vierpole.** Mit 47 Abbildungen. IV, 144 Seiten. 1948. In Österreich S 60.—, im Ausland sfr. 28.—

Beide Teile werden nur zusammen abgegeben

Soeben erschienen:

Sintereisen und Sinterstahl

Von

Dr. R. Kieffer und Dr. W. Hotop

unter Mitarbeit von H. J. Bartels und Dipl.-Ing. F. Benesovsky
Metallwerk Plansee Ges. m. b. H., Reutte in Tirol

Mit 264 Abbildungen. VIII, 556 Seiten. 1948

In Österreich S 165.—, geb. S 174.—; im Ausland sfr. 72.—, geb. sfr. 75.—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung